MC SYLLABUS

1.6a

MC SYLLABUS

1.6a

LEERGANG BESLISKUNDE

DEEL 6a

WISKUNDIGE PROGRAMMERING 1

DOOR

B. DORHOUT

J. KRIENS

tweede druk

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

1971

Eerste druk: 1968

Inhoud

	blz.
Voorwoord	1
1. Een aantal voorbeelden	3
2. Indeling van de wiskundige programmering	12
3. Het lineaire programmeringsprobleem	17
4. De simplexmethode	27
5. Toepassingen van lineaire programmering	64
6. De herziene simplexmethode	86
7. Dualiteit	100
8. Economische interpretatie van de simplexmethode; post-optimale problemen	125
Literatuur	138

Voorwoord

Na de behandeling van de vereiste voorkennis in de deeltjes 1.1 t/m 1.4 en de toelichting op de begrippen besliskunde en mathematische besliskunde in deeltje 1.5, wordt in het zesde deel van deze reeks de eerste groep van besliskundige methoden besproken. Deze groep wordt samengevat onder de naam wiskundige programmering. Van de zijde der wiskunde bezien, bevat de wiskundige programmering diè theorieën en technieken, welke verband houden met de bepaling van extremen van expliciet gegeven functies onder bepaalde bijvoorwaarden. Vanuit het oogpunt der praktische toepassingen behoren de te bespreken methoden tot de meest effectieve wapens van de besliskunde.

De omvang van de tekst maakte het noodzakelijk de stof over twee boekjes te verdelen. In het eerste boekje, deel 6 A, worden na paragrafen met voorbeelden resp. een indeling van de wiskundige programmering, onderwerpen uit de lineaire programmering besproken. Het tweede boekje, deel 6 B, bevat naast een paragraaf over speciale methoden om lineaire programmeringsproblemen op te lossen onderwerpen uit de convexe en de discrete programmering.

De schrijvers zijn dank verschuldigd aan Drs. J. VAN LIESHOUT, wetenschappelijk medewerker aan de Katholieke Hogeschool te Tilburg, wiens critische commentaar leidde tot vele verbeteringen van de tekst, in het bijzonder in §8.

Amsterdam, 1968

Bij de tweede druk

Afgezien van een aantal kleine verbeteringen in de tekst, meest aangebracht op initiatief van Drs. J. VAN LIESHOUT, is deze druk gelijk aan de vorige.

Amsterdam, 1971

1. Een aantal voorbeelden.

Ter illustratie van de typen problemen, die met behulp van de in dit deeltje te behandelen methoden opgelost kunnen worden, geven wij enkele eenvoudige voorbeelden. Achter de aan de problemen gegeven namen zijn tussen haakjes de oplossingsmethode en de plaats(en) vermeld waar het probleem verder besproken wordt.

Voorbeeld 1.1. Een mengprobleem (lineaire programmering; § 5)

In een fabriek wil men de vervaardiging van een legering ter hand nemen, welke minstens een bepaald percentage tin moet bevatten. Om het voorbeeld eenvoudig te houden, worden aan de legering geen verdere chemische of fysische eisen gesteld.

Voor de fabricage kunnen verschillende grondstoffen gebruikt worden, welke men in willekeurige verhoudingen kan mengen. Men vraagt zich nu af op welke wijze de legering zo goedkoop mogelijk gemaakt kan worden, terwijl toch aan de gestelde eis is voldaan.

Laten wij aannemen, dat het produkt minstens 18% tin moet bevatten en dat er vier grondstoffen zijn, die wij kunnen gebruiken. In tabel 1.1 is opgegeven, hoeveel procent tin in iedere grondstof aanwezig is en wat de kosten zijn per ton.

Tabel 1.1

Percentages tin en kosten van de grondstoffen

grondstof	percentage tin	kosten per ton	kosten per % tin
A	50	60	$\frac{60}{50} = 1{,}20$
B	10	30	$\frac{30}{10} = 3{,}00$
C	15	35	$\frac{35}{15} = 2{,}33$
D	36	47	$\frac{47}{36} = 1{,}31$

Uit de vierde kolom kan men aflezen, dat grondstof A de goedkoopste bron van tin is.

Geen van de grondstoffen bevat precies 18% tin, maar de grond-

stoffen A en D voldoen aan de eis minstens 18% te bevatten. Het percentage van B en C, die per ton goedkoper zijn dan A en D, is echter te laag. Daarom ligt het voor de hand na te gaan, of wij door het kiezen van een mengsel van enige grondstoffen niet een produkt kunnen krijgen, dat aan de eis voldoet en bovendien goedkoper is dan de grondstoffen A en D afzonderlijk.

Om dit systematisch te onderzoeken formuleren wij het probleem als volgt in de taal der wiskunde. Hoe de legering ook is samengesteld, steeds kunnen wij zeggen, dat het een mengsel is, waarin alleen de grondstoffen A, B, C en D kunnen voorkomen. Daarom nemen wij aan, dat één ton legering $x_1$ton A, $x_2$ton B, $x_3$ton C en $x_4$ton D bevat. Wij kunnen deze waarden niet willekeurig kiezen. In de eerste plaats moet voldaan worden aan de vergelijking

(1.1) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Bovendien moet het percentage tin minstens 18 bedragen, welke voorwaarde in formulevorm als volgt luidt:

(1.2) $$50x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 36x_4 \geqq 18.$$

Verder kunnen de variabelen $x_1, \ldots, x_4$ slechts niet-negatieve waarden aannemen, dus

(1.3) $$x_1, \ldots, x_4 \geqq 0.$$

De kosten y van het mengsel bedragen

(1.4) $$y = 60x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 47x_4.$$

De gestelde vraag de legering zo goedkoop mogelijk te maken, terwijl toch aan de gestelde eis is voldaan, komt na de wiskundige vertaling derhalve neer op het minimaliseren van (1.4) onder de voorwaarden (1.1), (1.2) en (1.3).

Voorbeeld 1.2. Een produktieprobleem (lineaire programmering; § 5)

In een fabriek kunnen twee soorten grammofoonplaten worden gemaakt. Bij de fabricage moeten beide soorten worden bewerkt door een persmachine en een machine die de randen bijslijpt. Wanneer er voldoende arbeiders aanwezig zijn, de grondstoffen in willekeurige hoeveelheden tegen constante prijs aangevoerd kunnen worden, alle

grammofoonplaten een afzet vinden tegen vaste prijzen, en ook de andere produktiefactoren geen belemmering vormen voor het niveau waarop de produktie zal plaatsvinden, dan wordt dit niveau bepaald door de capaciteiten van de twee genoemde machines. Gevraagd wordt het produktieprogramma op te stellen waarvoor de brutowinst maximaal is.

De door tijdstudies bepaalde bewerkingstijden in seconden van de platen P_1 en P_2 op de machines M_1 en M_2 en de brutowinsten per plaat zijn opgegeven in tabel 1.2.

Tabel 1.2

Bewerkingstijden en brutowinsten van de grammofoonplaten

type plaat	bewerkingstijd op de machine		brutowinst
	M_1	M_2	
P_1	4	10	6
P_2	5	4	4

Wij maken een programma op voor 1 uur. Worden hierin x_1 platen P_1 en x_2 platen P_2 gemaakt, dan luidt het probleem, wiskundig vertaald: maximaliseer

(1.5) $$y = 6x_1 + 4x_2$$

onder de voorwaarden

(1.6) $$4x_1 + 5x_2 \leqq 3600 ,$$

(1.7) $$10x_1 + 4x_2 \leqq 3600 ,$$

(1.8) $$x_1, x_2 \geqq 0.$$

Voorbeeld 1.3. Een transportprobleem (verdelingsmethode; § 9)

Van een bepaald produkt zijn in m havens de hoeveelheden $a_1,\ldots,a_m$ aanwezig. Deze moeten verscheept worden naar n bestemmingen, waar respectievelijk de hoeveelheden $b_1,\ldots,b_n$ nodig zijn. Wij onderstellen, dat er evenveel goederen gevraagd worden als er opgeslagen zijn, zodat voldaan is aan de volgende betrekking

$$(1.9) \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

De transportkosten worden evenredig ondersteld met de verscheepte hoeveelheden. Geeft men nu de vervoerskosten per eenheid van haven i naar bestemming j aan met c_{ij} en de langs deze route vervoerde hoeveelheid met x_{ij}, dan kan men de transportkosten zo klein mogelijk maken door het minimum te bepalen van de functie

$$(1.10) \qquad y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

onder de voorwaarden

$$(1.11) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,\ldots,m) ,$$

$$(1.12) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,\ldots,n) ,$$

en

$$(1.13) \qquad x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m; \quad j=1,\ldots,n).$$

Voorbeeld 1.4. Keuze van een vestigingsplaats (verdelingsmethode; § 9)

Een industrie wil een nieuwe fabriek bouwen voor onderdelen, die reeds op twee plaatsen gemaakt worden. Er is keuze tussen drie vestigingsplaatsen; een keuze die men wil laten bepalen door de transportkosten van de onderdelen naar de fabrieken waar ze nodig zijn.

Laten er van de onderdelen reeds 1000 exemplaren per maand gemaakt worden in A en 2000 in B, en laat de produktie gepland voor de nieuwe fabriek 1500 per maand bedragen. Van deze onderdelen zijn er in de fabriek in E 2000 en in die in F 2500 per maand nodig. De nieuwe fabriek kan gevestigd worden in K, L of M. De kosten van vervoer per eenheid tussen de fabrieken in E en F en de (eventuele) produktieplaatsen A, B, K, L en M zijn opgegeven in tabel 1.3.

Tabel 1.3

Vervoerskosten per eenheid tussen fabrieken en produktieplaatsen

	A	B	K	L	M
E	5	2	2	1	3
F	2	1	3	4	2

Wordt de fabriek in K gevestigd, dan kunnen de minimale transportkosten van de fabrieken in A, B en K naar de fabrieken in E en F berekend worden, uitgaande van formules die geheel analoog zijn aan de formules (1.10),...,(1.13). Hetzelfde kan men doen voor de gevallen waarin de vestiging in L respectievelijk in M plaatsvindt. Het laagste van de drie minima bepaalt de gunstigste plaats van vestiging voor de nieuwe fabriek.

Voorbeeld 1.5. Een inkoop- en voorraadkostenprobleem
(lineaire programmering; § 5)

Een groothandel beschikt voor één van zijn handelsartikelen, een seizoenartikel, over een pakhuis met een gegeven capaciteit van k eenheden. Het artikel kan gedurende het seizoen, dat t maanden duurt, aan het begin van iedere maand ingekocht worden, zij het niet steeds tegen dezelfde prijs per eenheid; deze prijzen bedragen in de opeenvolgende maanden $p_1,\ldots,p_t$. De verkoopprijs is constant. De vraag naar het artikel is voor de opeenvolgende maanden bekend en gelijk aan $d_1,\ldots,d_t$. Hieraan moet worden voldaan, wat uiteraard alleen kan, als alle $d_j \leq k$ zijn. Verder nemen wij aan dat de vraag in een bepaalde maand gelijkmatig over die maand verdeeld is. De kosten van het in voorraad houden zijn c_1 per eenheid, per tijdseenheid.

De inkoper van de groothandel vraagt zich af hoeveel eenheden hij iedere maand moet bestellen, teneinde de som van de inkoopkosten en de voorraadkosten te minimaliseren.

Geven wij de in te kopen hoeveelheden aan met $x_1,\ldots,x_t$, dan is de voorraad aan het begin van de j^{de} maand

$$\sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \quad ,$$

aan het eind van de j^{de} maand

$$\sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j} d_i$$

en gemiddeld dus

$$\sum_{i=1}^{j} x_i - \left(\sum_{i=1}^{j-1} d_i + \frac{1}{2} d_j \right)$$

(vgl. deel 5, voorbeeld 6.7).

De optimale waarden van de variabelen $x_1,\ldots,x_t$ worden nu gevonden door de functie

$$(1.14) \quad y = \sum_{j=1}^{t} p_j x_j + c_i \sum_{j=1}^{t} \left[\sum_{i=1}^{j} x_i - \left(\sum_{i=1}^{j-1} d_i + \frac{1}{2} d_j \right) \right]$$

te minimaliseren onder de voorwaarden

$$(1.15) \quad \sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \leq k \qquad (j= 1,\ldots,t) \ ,$$

$$(1.16) \quad \sum_{i=1}^{j} x_i \geq \sum_{i=1}^{j} d_i \qquad (j= 1,\ldots,t) \ ,$$

$$(1.17) \quad x_j \geq 0 \qquad (j= 1,\ldots,t) \ .$$

Voorbeeld 1.6. Een beleggingsprobleem
(kwadratische programmering ; § 13)

Een belegger wil een bedrag van *f* 1.000.000,- beleggen in vier verschillende fondsen, die wij zullen aangeven met A, B, C en D. Hij zal dit doen door 10.000 coupures van *f* 100,- te kopen. De jaarlijkse dividenduitkeringen per coupure zijn stochastisch en worden voor de vier fondsen aangegeven door respectievelijk de stochastische variabelen $\underline{d}_1$, $\underline{d}_2$, $\underline{d}_3$ en $\underline{d}_4$, die wij onderling onafhankelijk zullen onderstellen. De verwachtingen zijn resp. 4, 5, 6 en 3, de standaardafwijkingen 1, 2, 2 en 1 gulden. Wij nemen verder aan dat de koersen constant blijven.

De belegger wil gemiddeld minstens 4,5% rente van zijn kapitaal maken. Verder wenst hij in de bedrijven B en C niet meer dan 60% van zijn kapitaal te investeren en zal hij trachten onder deze voorwaarden zijn risico zo klein mogelijk te maken. Dit laatste zullen wij hier interpreteren als het zo klein mogelijk maken van de variantie van de totale jaarlijkse dividenduitkering (vgl.ook deel 5, voorbeeld 6.4).

De belegger vraagt zich af hoeveel coupures hij van de verschillende fondsen moet kopen om dit doel te bereiken.

Stel dat hij x_1, x_2, x_3 en x_4 coupures koopt van de fondsen A, B, C en D. De totale jaarlijkse dividenduitkering $\underline{d}$ bedraagt dan

(1.18) $$\underline{d} = x_1 \underline{d}_1 + x_2 \underline{d}_2 + x_3 \underline{d}_3 + x_4 \underline{d}_4 .$$

Volgens de stellingen 10.3, 10.4 en 10.5 uit deel 2 is de verwachting van $\underline{d}$

(1.19) $$\mathcal{E}\,\underline{d} = x_1\,\mathcal{E}\,\underline{d}_1 + x_2\,\mathcal{E}\,\underline{d}_2 + x_3\,\mathcal{E}\,\underline{d}_3 + x_4\,\mathcal{E}\,\underline{d}_4$$

en de variantie van $\underline{d}$

(1.20) $$\sigma^2(\underline{d}) = x_1^2\sigma^2(\underline{d}_1) + x_2^2\,\sigma^2(\underline{d}_2) + x_3^2\,\sigma^2(\underline{d}_3) + x_4^2\sigma^2(\underline{d}_4).$$

Door in (1.19) resp. (1.20) de numerieke waarden van de verwachtingen en de varianties in te vullen en de gestelde voorwaarden in formules uit te drukken kan men nagaan dat de optimale waarden van x_1, x_2, x_3 en x_4 gevonden worden door de functie

(1.21) $$y = x_1^2 + 4\,x_2^2 + 4\,x_3^2 + x_4^2$$

te minimaliseren onder de voorwaarden

(1.22) $$4\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + 3\,x_4 \geqq 45.000\ ,$$

(1.23) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10.000\ ,$$

(1.24) $$x_2 + x_3 \leqq 6.000\ ,$$

(1.25) $$x_1,\ldots,x_4 \geqq 0.$$

Voorbeeld 1.7. Een produktieprobleem

(kwadratische programmering; § 13)

In voorbeeld 1.2 leidde de onderstelling dat de brutowinst per plaat onafhankelijk was van het aantal verkochte platen tot de

lineaire opbrengstfunctie (1.5). Is de brutowinst per plaat wel afhankelijk van de omvang van de eigen produktie, dan kan de opbrengstfunctie onder bepaalde voorwaarden kwadratisch worden; bijvoorbeeld

$$y = \left(10 - \frac{x_1}{400}\right) x_1 + \left(8 - \frac{x_2}{100}\right) x_2 \,. \tag{1.26}$$

In dit geval moet dus de functie (1.26) gemaximaliseerd worden onder de voorwaarden (1.6), (1.7) en (1.8).

Voorbeeld 1.8. Een mengprobleem (convexe programmering; § 12)

In voorbeeld 1.1 is ervan uitgegaan dat de percentages in de beschikbare grondstoffen gegeven constanten zijn, hetgeen leidde tot de lineaire voorwaarde (1.2). Soms is deze onderstelling niet realistisch en moeten deze percentages opgevat worden als stochastische grootheden, waarvan in het gunstigste geval de kansverdeling bekend is. Het is dan niet zinvol te eisen dat de te maken legering minstens zoveel procent moet bevatten omdat het percentage in het gefabriceerde produkt eveneens stochastisch zal zijn. Wel kan men de volgende, lichtere, eis stellen: de kans dat het percentage kleiner is dan de gewenste grens dient klein te zijn. Geven wij de percentages tin in de grondstoffen A, B, C en D aan met resp. $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_4$ en de gewenste grens met g, dan luidt de nieuwe eis, wiskundig geformuleerd,

$$P\left[\sum_{h=1}^{4} x_h \underline{a}_h < g\right] \leqq \varepsilon \,, \tag{1.27}$$

waarin ε een klein positief getal is. Bij het berekenen van de optimale samenstelling moet voorwaarde (1.2) dus vervangen worden door voorwaarde (1.27).

De nieuwe voorwaarde is in de vorm (1.27) nog niet goed hanteerbaar en zal daarom in § 12 herleid worden tot een voorwaarde van de vorm

$$g(x_1,\ldots,x_4) \leqq b, \tag{1.28}$$

waarin $g(x_1,\ldots,x_4)$ een convexe functie is (vgl. § 13 van deel 1). Het probleem is hierdoor een convex programmeringsprobleem geworden.

Voorbeeld 1.9. Een investeringsprobleem (discrete programmering; § 15 e.v.)

Een industrie kan een bedrag van b gulden investeren in p verschillende projecten. Het voor project h vereiste kapitaal bedraagt a_h. De opbrengst van een project wordt gedefinieerd als de verdisconteerde waarde van alle in de toekomst te verwachten opbrengsten en is voor het h^{de} project c_h. Welke projecten moet men aanpakken om de totale opbrengst zo groot mogelijk te maken?

Om dit probleem op te lossen voeren wij beslissingsvariabelen x_h (h=1,...,p) in, die slechts de waarden 0 en 1 kunnen aannemen; $x_h = 0$ betekent "project h niet uitvoeren", $x_h = 1$ betekent "project h wel uitvoeren". De opbrengstfunctie is dan

$$y = \sum_{h=1}^{p} c_h x_h \,, \tag{1.29}$$

welke functie gemaximaliseerd moet worden onder de voorwaarden

$$\sum_{h=1}^{p} a_h x_h \leq b \,, \tag{1.30}$$

en

$$x_h = 0 \text{ of } 1 \quad (h=1,\ldots,p) \,. \tag{1.31}$$

Bovenstaande, in de verbale formulering sterk uiteenlopende voorbeelden bezitten na de vertaling in een wiskundig probleem alle de volgende vorm: een expliciet gegeven functie van een aantal x-variabelen dient gemaximaliseerd of geminimaliseerd te worden, waarbij de x-variabelen niet vrij gekozen mogen worden, doch moeten voldoen aan een aantal bijvoorwaarden. Wiskundig gezien verschillen zij alleen in de vorm van de te optimaliseren functie en in de aard van de bijvoorwaarden.

In de terminologie van deel 5, § 3, zijn alle voorbeelden geformuleerd als één-stapsbeslissingsproblemen. Uitgaande van de toestand S_0, waarin het door de beslisser bestudeerde systeem verkeert, tracht hij de beslissingsvector $X = (x_1,\ldots,x_n)$ zodanig te kiezen dat de waarderingsfunctie $y\,(S_0;X)$ optimaal wordt. In alle voorbeelden kan X niet willekeurig worden gekozen, maar dient men zijn keuze te beperken tot die vectoren, welke in een mede door S_0 bepaald gebied $\mathcal{X}_{S_0}$ van toegelaten beslissingen liggen.

Het beslissingsprobleem luidt dus :
bepaal het maximum (of het minimum) van de X-functie

(1.32) $y\ (S_0;\ X)$

onder de bijvoorwaarde

(1.33) $X \in \mathcal{X}_{S_0}$

(vgl.ook (5.1) en (5.2) in deel 5).

Aangezien bij een één-stapsprobleem alleen de uitgangstoestand S_0 van belang is, kan er nooit verwarring ontstaan over welke toestand gesproken wordt; daarom zal in dit deeltje zowel in de criterium-functie als bij het toegelaten gebied het symbool S_0 worden weggelaten. Wij schrijven dan y (X) i.p.v. y $(S_0;X)$ en $\mathcal{X}$ i.p.v. $\mathcal{X}_{S_0}$.

Bekijken wij de gegeven voorbeelden vanuit het oogpunt van de praktische toepasbaarheid, dan kan worden opgemerkt dat ze alle sterk vereenvoudigde versies zijn van veel voorkomende problemen. Het is echter niet moeilijk ze realistischer te maken, hetgeen met sommige problemen dan ook in latere paragrafen zal gebeuren. Verder worden daar enkele nog niet genoemde voorbeelden uitgewerkt.

2. Indeling van de wiskundige programmering.*)

Teneinde de technieken die tot de wiskundige programmering behoren in groepen te kunnen indelen kiezen wij in deze syllabus de volgende omschrijving van wiskundige programmering als uitgangspunt:

wiskundige programmering is dat deel van de wiskunde, waarin het bepalen van uiterste waarden van expliciet gegeven reële functies van eindig veel variabelen wordt bestudeerd.

Het één-stapsbeslissingsprobleem leidt dus na de vertaling direct tot een probleem uit de wiskundige programmering. De te optimaliseren functie kan dan steeds in de vorm

(2.1) $y = f(x_1,\ldots,x_n)$

geschreven worden, of afgekort als

---

*) De inhoud van deze paragraaf valt gedeeltelijk samen met die van § 5 uit deel 5.

(2.2) $y = f(X)$,

waarin X een n-dimensionale vector (punt) met coördinaten $x_1,\ldots,x_n$ voorstelt. *)

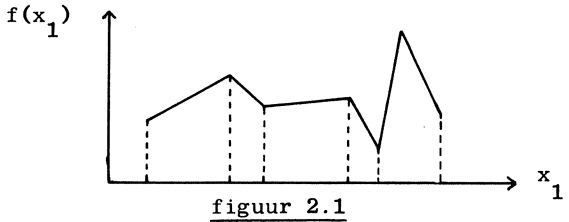
In de wiskundige programmering kunnen wij nu onderscheiden:

A. wiskundige programmering zonder bijvoorwaarden: de variabelen, als functie waarvan het extreem bepaald moet worden, kunnen alle, onafhankelijk van elkaar, de gehele as van reële getallen doorlopen.

B. wiskundige programmering met bijvoorwaarden: de waarden, welke de variabelen aan kunnen nemen zijn aan bepaalde beperkingen onderworpen.

ad A. Het bepalen van extremen bij een belangrijke groep van problemen, die hieronder valt, is reeds ter sprake gekomen in de paragrafen 10 en 12 van deel 1. Voor de tweemaal differentieerbare functies van één, twee of meer variabelen werden noodzakelijke voorwaarden opgesteld, waaronder in een punt een relatief minimum of maximum wordt bereikt.

Deze methoden kunnen niet zonder meer toegepast worden op functies, die wel continu zijn, maar niet overal differentieerbaar. Voor een functie $f(x_1)$ van één variabele, welke bij geschikt gekozen intervallen voor x_1 in alle intervallen een lineaire functie is van x_1, een zogenaamde knikfunctie (vgl. figuur 2.1), kan aangetoond worden dat men de extremen kan vinden met behulp van gemengde programmering (een omschrijving hiervan volgt verderop in deze paragraaf; zie blz. 16).



figuur 2.1

Een functie, lineair op bepaalde intervallen

*) Ten aanzien van de notatie maken wij de volgende afspraken: getallen worden met kleine letters aangegeven; vectoren met hoofddrukletters; matrices, verzamelingen en ruimten met hoofdschrijfletters. Een hoofddrukletter zonder accent is een kolomvector, een hoofddrukletter met accent een rijvector.

Hetzelfde kan bewezen worden voor functies $f(x_1,\ldots,x_n)$, welke de volgende vorm hebben:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j (x_j) , \tag{2.3}$$

waarbij alle functies ϕ_j de zojuist genoemde eigenschap bezitten.

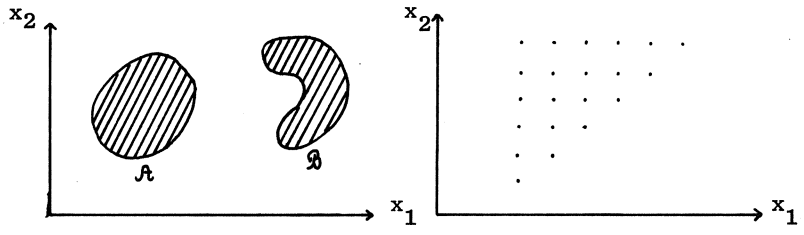
Het bepalen van extremen van functies, die niet voor alle reële waarden van de variabelen gedefinieerd zijn, rangschikken wij onder B door te handelen, alsof de variabelen alleen waarden mogen aannemen in het definitiegebied van de functie.

ad B. Noemen wij de verzameling van waarden, die de vector X kan doorlopen het toegelaten gebied, dan kan deel B verder gesplitst worden door onderscheid te maken tussen

B 1: het toegelaten gebied is samenhangend,

B 2: het toegelaten gebied is niet-samenhangend.

Hierbij noemen wij het toegelaten gebied $\mathcal{X}$ samenhangend, wanneer het mogelijk is, vanuit ieder punt in het gebied te wandelen naar ieder ander punt in het gebied langs een weg, welke geheel in dit gebied ligt. Wanneer dit niet mogelijk is, heet het gebied niet-samenhangend. In figuur 2.2 is $\mathcal{X}$ samenhangend als het alleen uit de punten van $\mathcal{A}$ òf alleen uit de punten van $\mathcal{B}$ bestaat, maar niet, wanneer het uit de punten van $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ tezamen bestaat. De punten, aangegeven in figuur 2.3 vormen uiteraard een niet-samenhangend gebied.



figuur 2.2 figuur 2.3

Samenhangende en niet-samenhangende gebieden

ad B 1. Eén hiertoe behorend onderwerp is ook reeds in deel 1 genoemd, n.l. de multiplicatorenmethode van Lagrange (vgl.deel 1, § 12). Deze verschaft een middel om uiterste waarden op te sporen van differentieerbare functies wanneer de variabelen moeten voldoen aan één of meer voorwaarden van de vorm $g_i(X) = b_i$ $(i= 1,\ldots,m)$, waarin de functies g_i eveneens differentieerbaar zijn.

Verder behoort tot deze categorie de lineaire programmering; de functie f(X) is hierbij lineair en gedefinieerd voor alle reële vectoren X. Het toegelaten gebied wordt vastgelegd door voorwaarden van de vorm $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i$, of van de vorm $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, terwijl bovendien geëist wordt dat alle, of een deel van de variabelen slechts niet-negatieve waarden kunnen aannemen.

In de niet-lineaire progammering wordt gevraagd een functie f(X) te optimaliseren onder voorwaarden van de vorm

(2.4) $$g_i(x_1,\ldots,x_n) = g_i(X) \leqq b_i ,$$

waarin f(X) en $g_i(X)$ differentieerbaar zijn en gedefinieerd voor alle reële vectoren X. Bij de meeste methoden om deze problemen op te lossen stelt men naast de differentieerbaarheid nog andere eisen aan de functies f en g_i, waardoor het probleem vereenvoudigd wordt. Men eist dan dat de functies g_i behalve differentieerbaar ook convex zijn en dat f in het minimaliseerprobleem convex is, resp. in het maximaliseerprobleem concaaf (vgl. voor de begrippen convexe en concave functies deel 1, § 13). Gewoonlijk spreekt men van convexe of concave programmering. Is f(X) kwadratisch en bovendien convex (resp.concaaf) en wordt gevraagd f te minimaliseren (resp.maximaliseren) onder lineaire bijvoorwaarden, dan wordt de term kwadratische programmering gebruikt.

ad B 2. Een hiertoe behorend voorbeeld is het geval, waarin de variabelen x_j hetzij 0, hetzij geheel positief moeten zijn. Soms kunnen deze problemen ten gevolge van de vorm van de andere bijvoorwaarden met de onder B 1 vallende methoden worden opgelost. Wanneer

dat niet zo is, spreekt men over discrete of geheeltallige programmering.

De term gemengde programmering heeft betrekking op situaties, waarin sommige variabelen alleen discrete waarden kunnen aannemen en andere een samenhangend gebied kunnen doorlopen.

Opmerking 2.1

Naast de bovengenoemde begrippen komt men verder nog de woorden stochastische programmering, dynamische programmering en Markov-programmering tegen.

Onder stochastische programmering verstaat men meestal programmering, waarbij één of meer van de coëfficiënten van de te optimaliseren functie en/of één of meer coëfficiënten in de bijvoorwaarden stochastische grootheden zijn. Daarnaast bestaan er situaties, waarin de variabelen x_j zelf stochastische grootheden zijn. Al dergelijke problemen kunnen herleid worden tot gevallen van de eerder in deze paragraaf genoemde typen,bijv. door in plaats van $\underline{f}$ de verwachting $\mathcal{E}\,\underline{f}$ te optimaliseren, of door een voorwaarde met stochastische coëfficiënten $\underline{g}_i(x_1,\ldots,x_n) \leqq b_i$ te vervangen door een voorwaarde van de vorm $P\left[\underline{g}_i(x_1,\ldots,x_n) \leqq b_i\right] \geqq 1 - \varepsilon_i$ (ε_i een klein positief getal), in welk laatste geval het probleem veelal in een convex programmeringsprobleem overgaat (vgl. § 12 van dit deeltje). Fraaier zou het uiteraard zijn, wanneer men de verdelingsfunctie van de optimale waarde van $\underline{f}$ kon bepalen. Dit leidt echter tot grote wiskundige moeilijkheden en er bestaat tot nog toe slechts weinig literatuur over.

Bij het oplossen van meer-stapsbeslissingsproblemen moet men vaak een beroep doen op andere dan de in dit deeltje behandelde oplossingstechnieken. Eén van die technieken draagt de naam dynamische programmering, een van R.BELLMAN afkomstige methode, waarmee tal van problemen efficiënter opgelost kunnen worden dan met de in de paragrafen 4 en 6 te bespreken simplexmethoden.

Kunnen in een meer-stapsbeslissingsprobleem de overgangen van de

ene toestand naar de andere worden beschreven met behulp van een zgn. Markov-proces, dan komen oplossingstechnieken in aanmerking, die men samenvat onder de naam Markov-programmering. Zowel voor de dynamische programmering als voor de Markov-programmering wordt verwezen naar deel 7 van deze syllabusserie.

3. Het lineaire programmeringsprobleem.

In aansluiting op de gegeven definitie van wiskundige programmering verstaan wij onder lineaire programmering: het bepalen van uiterste waarden van lineaire functies, wanneer de variabelen moeten voldoen aan één of meer lineaire bijvoorwaarden in de vorm van vergelijkingen of ongelijkheden.

Wij zullen voorlopig onderstellen dat het probleem er als volgt uitziet:
maximaliseer

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0} \quad (i=1,\ldots,m) \tag{3.2}$$

*)

en

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n), \tag{3.3}$$

waarin de c_j, a_{ij} en a_{i0} gegeven constanten zijn. Bovendien zullen wij aannemen dat $n \geq m$ is. In § 4 zal blijken, dat de speciale vorm van het probleem (3.1) t/m (3.3) - maximaliseren, vergelijkingen, alle $x_j \geq 0$ - geen beperking inhoudt, omdat ieder lineair programmeringsprobleem ertoe kan worden herleid.

---

*) In tegenstelling tot de notatie in § 2 en in § 5 van deel 5 worden de rechterleden van de vergelijkingen hier aangegeven met a_{i0} in plaats van b_i, teneinde later de overeenkomstige behandeling van alle a_{ij} te benadrukken en de notatie te vereenvoudigen.

Met behulp van vectoren is het door (3.1) t/m (3.3) gegeven probleem als volgt op te schrijven:

maximaliseer

(3.4) $$y = C'X$$

onder de voorwaarden

(3.5) $$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = A_0$$

en

(3.6) $$X \geq 0,$$

waarin $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$, $A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ voor $j=0,\ldots,n$.

C en X zijn n-dimensionale vectoren, waarin n gelijk is aan het aantal variabelen dat een rol speelt, terwijl de vectoren $A_j (j=0,\ldots,n)$ m-dimensionaal zijn en m bepaald wordt door het aantal bijvoorwaarden, dat in (3.2) is opgenomen.

Formule (3.5) kan nog enigszins anders opgeschreven worden wanneer men de vectoren $(A_1,\ldots,A_n)$ samenbrengt tot de matrix $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ is dan de m × n matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ en (3.5) gaat over in

(3.7) $$\mathcal{A} X = A_0.$$

De formules (3.4) t/m (3.6) vormen het uitgangspunt voor de verdere behandeling van het lineaire programmeringsprobleem. Ze kunnen als volgt geïnterpreteerd worden: gevraagd een vector X te berekenen, die aan (3.5) en (3.6) voldoet en y maximaal maakt.

Alvorens in § 4 een bepaalde oplossingsmethode gegeven wordt, bespreken wij enige eigenschappen van de verzameling $\mathcal{X}$ van vectoren X die aan (3.5) en (3.6) voldoen en van de vector X, waarvoor het

maximum van y bereikt wordt.

Definitie 3.1

Een vector X, die aan de voorwaarden (3.5) en (3.6) voldoet is een toegelaten vector; deze correspondeert met een toegelaten oplossing van het probleem.

Stelling 3.1

De verzameling $\mathcal{X}$ van toegelaten vectoren is òfwel leeg, òfwel zij bevat precies één element, òfwel zij bevat oneindig veel elementen.

Bewijs:

Dat het kan voorkomen dat de verzameling van toegelaten vectoren leeg is, of precies één element bevat, kan men door voorbeelden eenvoudig aantonen. Blijft dus te bewijzen, dat in het geval er meer dan één toegelaten vector is, er ook oneindig veel zijn.

Stel daartoe dat X_1 en X_2 toegelaten vectoren zijn; er geldt dus

(3.8) $$\mathcal{A} X_1 = A_0$$

en

(3.9) $$\mathcal{A} X_2 = A_0.$$

Dan is ook iedere vector X van de vorm

(3.10) $$X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2 \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

toegelaten. Immers voor deze vectoren X geldt

$$\mathcal{A}\left[\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2\right] = \mathcal{A}\lambda X_1 + \mathcal{A}(1 - \lambda) X_2 =$$

$$= \lambda \mathcal{A} X_1 + (1 - \lambda)\mathcal{A} X_2 = \lambda A_0 + (1-\lambda) A_0 = A_0 .$$

Verder zijn alle elementen van $\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$ groter of gelijk aan nul, zodat ook aan (3.6) is voldaan.

Definitie 3.2

Een verzameling punten is convex wanneer voor ieder tweetal elementen A en B in die verzameling geldt, dat ook de elementen

$$(1 - \lambda)\, A + \lambda\, B \qquad (0 < \lambda < 1)$$

tot die verzameling behoren.

Meetkundig betekent het dat de verbindingsrechte tussen twee punten in een verzameling geheel tot de verzameling behoort.
In fig.2.2 is verzameling $\mathcal{A}$ dus convex; verzameling $\mathcal{B}$ echter niet.

Stelling 3.2

De verzameling $\mathcal{X}$ van toegelaten vectoren is convex.

Bewijs:

Dit volgt direct uit het bewijs van stelling 3.1.

Niet-lege verzamelingen $\mathcal{X}$ kunnen worden onderscheiden in begrensde verzamelingen en niet-begrensde verzamelingen. In het laatste geval is het mogelijk dat er oplossingen met willekeurig grote y-waarden bestaan. Voorlopig beperken wij ons tot begrensde verzamelingen $\mathcal{X}$.

Naast de twee in de stellingen 3.1 en 3.2 genoemde eigenschappen kan er dan over $\mathcal{X}$ nog meer gezegd worden. Hiertoe is de volgende definitie nodig.

Definitie 3.3

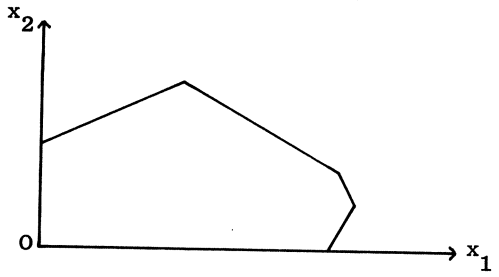
Een punt X is een extreem punt van een convexe verzameling dan en slechts dan, wanneer er geen punten X_1 en X_2, $X_1 \neq X_2$, tot de verzameling behoren, zodanig dat $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2$ met $0 < \lambda < 1$.

Stelling 3.3

Wanneer de verzameling van toegelaten vectoren begrensd is, bezit deze een eindig aantal extreme punten.

Deze stelling houdt in, dat $\mathcal{X}$ niet door "gebogen" lijnstukken wordt begrensd, maar bijvoorbeeld in twee dimensies alleen door rechte lijnstukken en hoekpunten (vgl.figuur 3.1). Evenzo wordt de verzameling van toegelaten vectoren in een drie-dimensionaal probleem alleen begrensd door vlakke veelhoeken, rechte lijnstukken en hoekpunten.
De verzameling van toegelaten vectoren bezit bij problemen in ruimten met meer dimensies overeenkomstige eigenschappen. De extreme punten

zijn steeds hoekpunten.



figuur 3.1
Een convexe verzameling met eindig veel extreme punten in het platte vlak

Wij zullen deze stelling hier niet bewijzen, evenmin als de volgende.

Stelling 3.4

Wanneer de verzameling $\mathfrak{X}$ begrensd is, bereikt de functie $y = C'X$ het maximum in een hoekpunt van $\mathfrak{X}$.

De bij hoekpunten van $\mathfrak{X}$ behorende vectoren zijn dus erg belangrijk en men kan zich de vraag stellen of aan een toegelaten vector $X = P = (p_1,\ldots,p_n)$ gezien kan worden of deze bij een hoekpunt behoort of niet. Dit is inderdaad het geval. Als $X = P$ toegelaten is, weten wij reeds dat alle variabelen x_j een waarde p_j bezitten groter dan of gelijk aan nul. Is $X = P$ een hoekpunt van $\mathfrak{X}$, dan kan men bewijzen dat de vectoren A_j die in (3.5) corresponderen met variabelen, die een positieve waarde p_j hebben, een bepaalde eigenschap bezitten. In stelling 3.5 is deze eigenschap geformuleerd.

Stelling 3.5

Een toegelaten vector X is dan en slechts dan een hoekpunt van $\mathfrak{X}$, wanneer de variabelen $x_j > 0$ corresponderen met vectoren A_j uit $\mathcal{A}$, die lineair onafhankelijk zijn.

Stelling 3.4 houdt in dat wij ons bij het zoeken naar het maximum kunnen beperken tot de hoekpunten van het toegelaten gebied. Combineren wij stelling 3.5 met de stelling, dat (m + 1) m-dimensionale vectoren altijd lineair afhankelijk zijn (vgl.stelling 4.2 uit deel 1), dan blijkt bij een hoekpunt van $\mathfrak{X}$ een vector X te behoren met

hoogstens m elementen > 0 en dus bestaat er een optimale oplossing, waarin hoogstens m variabelen > 0 zijn.

Zolang er geen complicaties optreden (zogenaamde ontaarding), bezit elke bij een hoekpunt behorende vector X precies m elementen $\neq 0$. De vectoren A_i die bij deze elementen horen, vormen dan een basis van de m-dimensionale ruimte, waarin de vectoren A_j liggen. Omdat ook in het geval, dat minder dan m elementen van X ongelijk nul zijn, de bij deze elementen behorende vectoren A_i kunnen worden gevuld tot een basis *), noemt men de betreffende oplossingen <u>basisoplossingen</u>.

Men kan het voorgaande ook iets anders formuleren. Uit § 6 van deel 1 volgt dat m vergelijkingen met m onbekenden opgelost kunnen worden, wanneer de matrix van de coëfficiënten niet-singulier is. Stel nu dat wij alle niet-singuliere (m × m) matrices opsporen die zich in de (m × n) matrix $\mathfrak{A}$ bevinden (wij hebben aangenomen $n \geq m$). De bijbehorende m vergelijkingen lossen wij iedere keer op; variabelen x_j die niet in de vergelijkingen voorkomen worden gelijk aan nul gesteld. Wij verkrijgen op deze wijze een groot aantal (maximaal $\binom{n}{m}$) X - vectoren die aan de voorwaarden (3.5) voldoen. Wel zullen er niet-toegelaten vectoren tussen zitten omdat één of meer x_j-variabelen een negatieve waarde hebben. Zijn er echter toegelaten vectoren tussen, dan kan men bewijzen dat er minstens één bij is, waarvoor y de maximale waarde bereikt onder de voorwaarden (3.5) en (3.6). Ook hier volgt dan uit dat er een optimale X bestaat met (hoogstens) m componenten $\neq 0$, d.w.z. een optimale basis oplossing.

Een <u>eerste conclusie</u> is dus, dat men bij het zoeken naar een optimale oplossing alleen basisoplossingen behoeft te vergelijken, waarvan er hoogstens $\binom{n}{m}$ zijn.

Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt bij de oudste algemene oplossingsmethode voor het lineaire programmeringsprobleem, de <u>simplexmethode</u>. Deze werd in 1947 geformuleerd door G.B. DANTZIG en in 1951 gepubliceerd in "Activity Analysis of Production and Allocation", ver-

*) In §4 wordt aangetoond, dat elk lineair programmeringsprobleem zo geformuleerd kan worden, dat A m lineair onafhankelijke vectoren bevat. Stelling 3.2 uit deel 1 kan dan worden toegepast.

handelingen van een conferentie, uitgegeven onder redactie van T.C. KOOPMANS (John Wiley and Sons, New York (1951), hoofdstuk XXI).

Bij de door DANTZIG voorgestelde methode zoekt men eerst een toegelaten basisoplossing en gaat men vervolgens na, of er een basisoplossing bestaat met een minstens even hoge y-waarde. Zo ja, dan wordt deze berekend en wordt de stap herhaald. Voor niet ontaarde problemen neemt de waarde van de criteriumfunctie in elke stap met een positief bedrag toe, zodat men eenzelfde basisoplossing nooit vaker dan één maal behoeft te berekenen. De methode kan zo worden verfijnd, dat deze laatste eigenschap ook voor ontaarde problemen geldt. Op grond hiervan luidt onze tweede conclusie: de simplexmethode leidt in hoogstens $\binom{n}{m}$ stappen van een eerste toegelaten basisoplossing tot een optimale oplossing.

In de praktijk blijkt het aantal stappen altijd veel kleiner te zijn dan $\binom{n}{m}$ en gebruikt men wel 3m als schatting voor de bovengrens van het aantal stappen.

Na 1947 zijn er verschillende variaties van de simplexmethode uitgewerkt. Zij hebben alle de eigenschap, dat in iedere stap een al dan niet toegelaten basisoplossing wordt berekend,,die volgens het een of andere criterium beter is dan de oplossing uit de voorafgaande stap. Daarnaast zijn er geheel andere methoden voorgesteld. De op de simplexmethode gebaseerde oplossingsmethoden zijn in de praktijk steeds de beste gebleken. Wij behandelen in dit deeltje de oorspronkelijke vorm van de simplexmethode (§ 4), de herzien simplexmethode (§ 6) en de duale simplexmethode (§ 7).

Ter illustratie van enige gebruikte begrippen besluiten wij deze paragraaf met twee voorbeelden.

Voorbeeld 3.1

Gegeven zijn de ongelijkheden

$$x_1 + 3x_2 \leq 10 , \tag{3.11}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10 , \tag{3.12}$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0. \tag{3.13}$$

In fig. 3.2 geeft het gearceerde gedeelte aan welke vectoren (x_1,x_2) voldoen aan de drie voorwaarden.

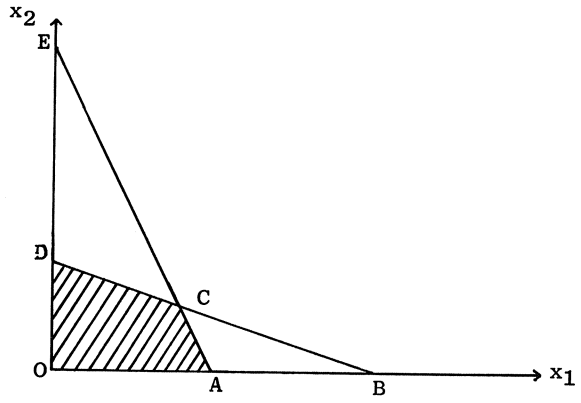


fig.3.2

Toegelaten vectoren (x_1,x_2)

De voorwaarden (3.11) en (3.12) nemen de vorm (3.2) resp. (3.5) aan, wanneer wij aan de eerste voorwaarde een variabele x_3 toevoegen en aan de tweede voorwaarde een variabele x_4 als volgt:

(3.14) $\quad x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$,

(3.15) $\quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 10$.

Deze voorwaarden zijn gelijkwaardig aan (3.11) en (3.12) als wij eisen $x_3 \geq 0$ en $x_4 \geq 0$.

De vectoren A_j zijn 2-dimensionaal en luiden:

$$A_0 = \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ mogelijke bases van de ruimte. In onderstaand overzicht zijn deze opgegeven, tezamen met de corresponderende X-vectoren

en de bijbehorende punten in fig.3.2.

basis	X - vector	punt in fig.3.2
(A_1, A_2)	$(4 \quad 2 \quad 0 \quad 0)$	C
(A_1, A_3)	$(5 \quad 0 \quad 5 \quad 0)$	A
(A_1, A_4)	$(10 \quad 0 \quad 0 \quad -10)$	B
(A_2, A_3)	$(0 \quad 10 \quad -20 \quad 0)$	E
(A_2, A_4)	$(0 \quad 3\frac{1}{3} \quad 0 \quad 6\frac{2}{3})$	D
(A_3, A_4)	$(0 \quad 0 \quad 10 \quad 10)$	O

De bases (A_1, A_4) en (A_2, A_3) leiden niet tot toegelaten oplossingen.

Het gearceerde gebied in fig.3.2 valt niet samen met het door (3.14), (3.15) en de ongelijkheden $x_j \geqq 0$ bepaalde toegelaten gebied $\mathcal{X}$, dat eerder in deze paragraaf werd ingevoerd. Immers de verzameling $\mathcal{X}$ is in het algemeen n-dimensionaal (in ons voorbeeld dus 4-dimensionaal), terwijl de gearceerde verzameling ligt in een 2-dimensionale ruimte. In feite is deze verzameling de projectie $\mathcal{X}^*$ van de verzameling $\mathcal{X}$ op de 2-dimensionale (x_1, x_2)-ruimte. Het volgende eenvoudige voorbeeld geeft dit duidelijk aan.

Voorbeeld 3.2

Gegeven zijn de voorwaarden

(3.16) $\quad x_1 + 3x_2 = 15,$

(3.17) $\quad x_1 \leqq 5,$

(3.18) $\quad x_1, x_2 \geqq 0.$

De toegelaten (x_1, x_2) - waarden liggen op het lijnstuk DC in fig.3.3.

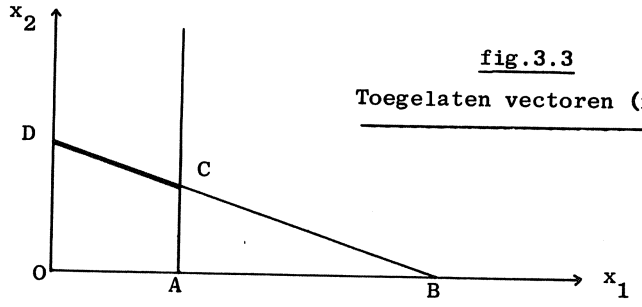


fig.3.3
Toegelaten vectoren (x_1, x_2).

Voegen wij aan (3.17) de niet-negatieve variabele x_3 toe, dan krijgt deze voorwaarde de met (3.5) overeenstemmende vorm

(3.19) $\qquad x_1 + x_3 = 5.$

Het toegelaten gebied $\mathcal{X}$ ligt in de 3-dimensionale (x_1,x_2,x_3) - ruimte en bestaat uit de punten op de snijlijn FC van de vlakken FDB en FEAC. De toegelaten punten in het (x_1,x_2)-vlak vinden wij door FC op dit vlak te projecteren; deze vormen dus de verzameling $\mathcal{X}^*$ (vgl. de figuren 3.3 en 3.4).

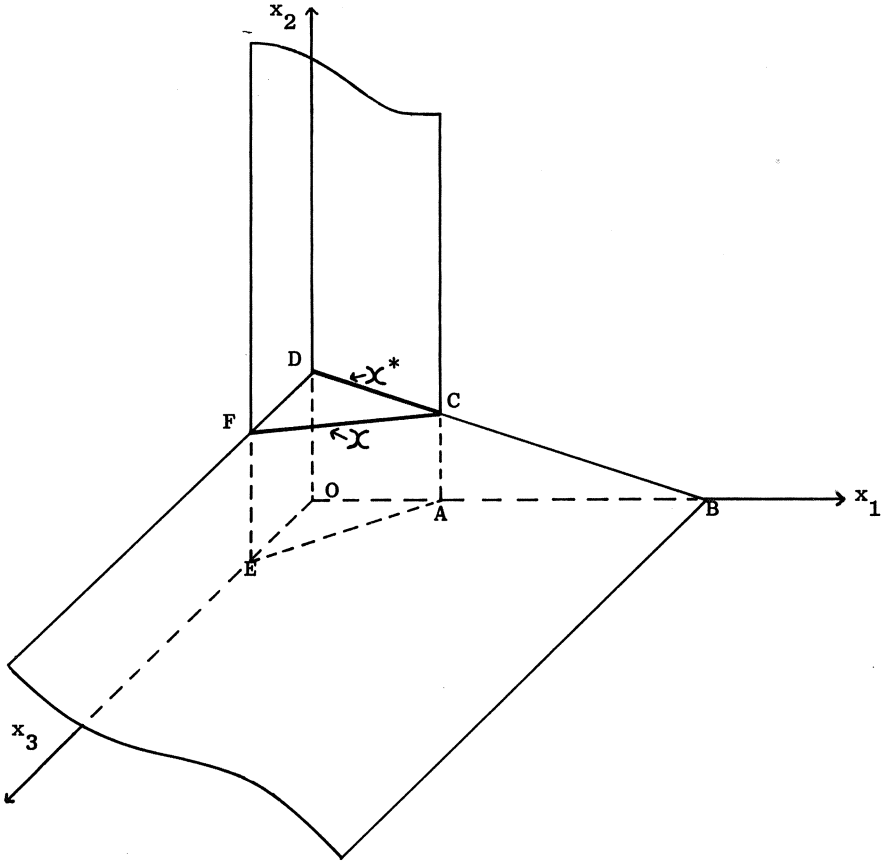


fig.3.4

De toegelaten verzameling $\mathcal{X}$ en de projectie $\mathcal{X}^*$ op het (x_1,x_2)-vlak

4. De simplexmethode.

In § 3 werd opgemerkt, dat de simplexmethode een iteratieve methode is, waarbij, uitgaande van een toegelaten basisoplossing, een nieuwe toegelaten basisoplossing gezocht wordt, welke correspondeert met een hogere waarde van de te maximaliseren functie. Dit proces wordt hieronder beschreven. Tijdens de beschrijving zullen enkele beperkende onderstellingen worden gemaakt, die wij achteraf zullen elimineren.

Uitgangspunt vormen de formules (3.4) t/m (3.6). Voorlopig onderstellen wij dat ieder m-tal vectoren A_j lineair onafhankelijk is en dat A_0 niet geschreven kan worden als een lineaire combinatie van minder dan m vectoren A_j. Laat

$$X' = (x_{10},\ldots,x_{m0},0,\ldots,0)$$

een toegelaten basisoplossing zijn, dan geldt dus

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0} > 0 \qquad (i=1,\ldots,m), \\ x_i &= 0 \qquad\qquad (i=m+1,\ldots,n). \end{aligned} \tag{4.1}$$

De bijbehorende waarde van de functie (3.4) is

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i\, x_{i0} \quad .^{*)} \tag{4.2}$$

Oplossing (4.1) legt een basis van de ruimte vast, bestaande uit de vectoren $A_1,\ldots,A_m$. Alle vectoren A_j (j=1,...,n) kunnen dus geschreven worden in de vorm (vgl. §2 en §3 uit deel 1)

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_i\, x_{ij} \; ; \tag{4.3}$$

de x_{ij} zijn constanten, waarvan de index j aangeeft welke vector ontbonden wordt en de index i de basisvector, waarbij de constante behoort.

---

*) Op zichzelf genomen zou het meer voor de hand liggen om een waarde die de variabele y aanneemt met y_0 aan te geven. Wij sluiten ons hier echter aan bij een internationaal gebruik, de waarde van de functie te noteren met z_0.

Volgens (3.5) en (4.1) geldt

$$A_0 = \sum_{i=1}^{m} A_i \, x_{i0} \quad ; \tag{4.4}$$

formule (4.3) is derhalve ook juist voor $j = 0$.

Voegen wij de vectoren $A_1,\ldots,A_m$ samen tot de vierkante matrix $\mathfrak{B}$ en de coëfficiënten $x_{1j},\ldots,x_{mj}$ tot de vector X_j, dan kunnen (4.3) en (4.4) ook geschreven worden in de vorm

$$A_j = \mathfrak{B} X_j \qquad (j=0,\ldots,n). \tag{4.5}$$

Aangezien $A_1,\ldots,A_m$ een basis is van de m-dimensionale ruimte, heeft $\mathfrak{B}$ een inverse (vgl. stelling 5.4 uit deel 1), zodat uit (4.5) ook volgt

$$X_j = \mathfrak{B}^{-1} A_j \qquad (j=0,\ldots,n). \tag{4.6}$$

De vectoren X_j kunnen dus berekend worden door de vectoren A_j links te vermenigvuldigen met de inverse van de matrix van basisvectoren.

Opmerking 4.1

De variabelen x_j met dezelfde indices als de vectoren die in de basis zitten, noemt men de basisvariabelen; de andere de niet-basisvariabelen. X_0 bevat dus de waarden van de basisvariabelen en is bij een toegelaten oplossing derhalve een vector met niet-negatieve elementen (in ons geval zelfs één met positieve elementen). In tegenstelling hiermee kunnen de elementen van de vectoren X_j zowel positief als negatief zijn.

Uitgaande van de beschreven basisoplossing (4.1) trachten wij nu een nieuwe toegelaten basisoplossing te construeren met een hogere waarde van de functie. Hiertoe gebruiken wij de volgende redenering.

Uit (4.3) volgt dat A_j gelijkwaardig is aan een bepaalde lineaire combinatie van de vectoren $A_1,\ldots,A_m$. Aan voorwaarde (3.5) blijft dus voldaan, wanneer wij aan het rechterlid van (4.4) toevoegen

$$\theta(A_j - \sum_{i=1}^{m} A_i x_{ij}),$$

waarin wij θ positief kiezen en voor j een element uit de verzameling $\{m + 1,\ldots,n\}$.

Formule (4.4) wordt nu

$$A_0 = \sum_{i=1}^{m} A_i x_{i0} + \theta (A_j - \sum_{i=1}^{m} A_i x_{ij}),$$

of

$$A_0 = \sum_{i=1}^{m} A_i (x_{i0} - \theta x_{ij}) + A_j \theta. \tag{4.7}$$

Daar X een toegelaten vector is en $x_{10},\ldots,x_{m0} > 0$ zijn, geldt voor voldoend kleine θ dat de vector

$$(x_{10} - \theta x_{1j},\ldots,x_{m0} - \theta x_{mj},0,\ldots,0, \theta ,0,\ldots,0) \tag{4.8}$$

ook toegelaten is; dit is echter in het algemeen geen basisoplossing.

De bijbehorende waarde z_0^* van de functie wordt voor deze vector enerzijds $c_j \theta$ groter dan in (4.2), maar anderzijds $\theta \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$ kleiner en kan dus uit de oude worden afgeleid met behulp van de formule

$$z_0^* = z_0 + \theta(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}). \tag{4.9}$$

Ter vereenvoudiging van de notatie voeren wij voor $\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$ een nieuwe grootheid z_j in en vatten wij $c_1,\ldots,c_m$ samen tot de vector C_b; C_b bevat dus de m elementen van de vector C met dezelfde indices als de basisvectoren in de oude oplossing. Dan is

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = C_b' X_j \tag{4.10}$$

en kunnen wij voor (4.9) schrijven

$$z_0^* = z_0 + \theta (c_j - z_j). \tag{4.11}$$

Opmerking 4.2

Doordat wij voor de waarde, die de functie aanneemt het symbool z_0 hebben gekozen is (4.10) ook juist voor $j = 0$ (vgl.(4.2)).

De nieuwe toegelaten vector geeft de functie dus een grotere waarde wanneer $\theta(c_j - z_j) > 0$ is. Daar $\theta > 0$ gekozen is, volgt uit (4.10) dat de functie slechts kan toenemen wanneer geldt $c_j - z_j > 0$.

Indien de waarde inderdaad groter wordt door de variabele x_j een positieve waarde te geven, dan ligt het voor de hand dit in zo sterk mogelijke mate te doen; dus θ zo groot mogelijk te kiezen. Een oplossing moet echter blijven voldoen aan (3.6), zodat moet gelden

$$\theta \geq 0,\ x_{i0} - \theta\, x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m). \tag{4.12}$$

Wegens $\theta > 0$ en $x_{i0} > 0$ is hieraan voor iedere $x_{ij} \leq 0$ voldaan. Voor $x_{ij} > 0$ kan het echter mislopen en daarom kan de waarde van θ hoogstens gelijk worden gekozen aan het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ met $x_{ij} > 0$. Gezien het bovenstaande kiezen wij steeds

$$\theta = \min_i \frac{x_{i0}}{x_{ij}} \quad (x_{ij} > 0). \tag{4.13}$$

Uit de in het begin van deze paragraaf gemaakte onderstelling dat A_0 niet kan worden geschreven als lineaire combinatie van minder dan m vectoren A_j, kan worden afgeleid dat het minimum in (4.13) slechts voor één waarde van i wordt bereikt. Laat dit zijn voor $i = r$; dan is $\theta = \frac{x_{r0}}{x_{rj}}$. De nieuwe toegelaten vector is

$$\begin{aligned}(&x_{10} - \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\, x_{1j},\ldots,\ x_{r-1,0} - \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\, x_{r-1,j}, 0,\ x_{r+1,0} + \\ &- \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\, x_{r+1,j},\ldots,\ x_{m0} - \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\, x_{mj}, 0,\ldots,\ \frac{x_{r0}}{x_{rj}}, 0,\ldots,0).\end{aligned} \tag{4.14}$$

De nieuwe oplossing bevat weer m positieve elementen; te weten de waarden van de variabelen $x_1,\ldots,x_{r-1},x_j,x_{r+1},\ldots,x_m$. Men kan eenvoudig aantonen dat de vectoren met dezelfde indices als de positieve variabelen (dus $A_1,\ldots,A_{r-1},A_j,A_{r+1},\ldots,A_m$) ook een basis van de ruimte vormen; (4.14) stelt derhalve een nieuwe basisoplossing voor. Het is er één, waarin (m-1) van de oude variabelen positief zijn, terwijl de positieve variabele x_j de plaats inneemt van de bij de oude oplossing positieve variabele x_r. De nieuwe waarden x^*_{i0} van de variabelen, die zowel in de oude als in de nieuwe oplossing voorkomen,worden volgens (4.14) gevonden door de transformaties

$$x^*_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\, x_{ij} \qquad (i=1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m). \tag{4.15}$$

De waarde x^*_{r0} van de variabele x_j, die in de nieuwe oplossing positief is, maar in de oude nul, volgt uit

$$x^*_{r0} = \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\,. \tag{4.16}$$

Substitueert men deze oplossing in (3.5), dan blijkt

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{m} A_i \left(x_{i0} - \frac{x_{r0}}{x_{rj}}\, x_{ij}\right) + A_j\, \frac{x_{r0}}{x_{rj}} = A_0. \tag{4.17}$$

Bij het afleiden van de nieuwe basisoplossing zijn wij begonnen met

$$\theta\,(A_j - \sum_{i=1}^{m} A_i\, x_{ij})$$

aan (4.4) toe te voegen, waarin j een willekeurig element uit de verzameling $\{m+1,\ldots,n\}$ was. In werkelijkheid kiest men j uiteraard niet willekeurig, maar gaat men eerst na of een verhoging van de functie te verwachten is, d.w.z. of $c_j - z_j$ positief is. Blijkt dit het geval te zijn voor meer dan één waarde van j, dan neemt men meestal die waarde waarvoor $c_j - z_j$ maximaal is. Laat dit het geval zijn voor $j = k$, dan

wordt A_r dus vervangen door A_k en wordt de nieuwe basis

(4.18) $$(A_1,\ldots,A_{r-1},A_k,A_{r+1},\ldots,A_m).$$

Uitgaande van deze nieuwe basis kunnen wij het proces herhalen. Men zou de nieuwe vectoren X_j^* en de nieuwe waarden z_j^* kunnen berekenen met de formules

(4.19) $$X_j^* = (\mathfrak{B}^*)^{-1} A_j ,$$

respectievelijk

(4.20) $$z_j^* = (C_b^*)' X_j^* ,$$

waarin $\mathfrak{B}^*$ de matrix van de basisvectoren (4.18) is en $(C_b^*)' = (c_1,\ldots,c_{r-1},c_k,c_{r+1},\ldots,c_m)$ het deel van C' dat nu met de basisvectoren correspondeert. Kent men de X_j^* en de z_j^*, dan bepaalt men achtereenvolgens het maximum van de verschillen $c_j - z_j$, waarmee de nieuwe basisvariabele wordt gevonden en het minimum van uitdrukkingen analoog aan (4.13), waarmee de waarde van de nieuwe basisvariabele en de variabele die uit de basis verdwijnt, worden vastgelegd. In principe wordt deze weg ook bewandeld; alleen blijkt het eenvoudiger te zijn de X_j^* en de z_j^* af te leiden uit de oude X_j en z_j, dan ze te berekenen met de formules (4.19) en (4.20). Dit kan als volgt.

De vergelijkingen (4.3) drukken de vectoren A_j uit als lineaire combinaties van de vectoren $A_1,\ldots,A_m$. De vector X_j^* bevat de componenten, wanneer A_j wordt uitgedrukt als lineaire combinatie van de nieuwe basisvectoren. Dit betekent dat wij om X_j^* te vinden A_r uit de rechterleden van de vergelijkingen (4.3) moeten elimineren. Hiertoe lossen wij A_r op uit vergelijking (4.3) voor $j = k$ ($x_{rk} \neq 0$; vgl.(4.13)).

(4.21) $$A_r = \frac{1}{x_{rk}} \left(A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} A_i x_{ik} \right).$$

Vervolgens substitueren wij (4.21) in de andere vergelijkingen (4.3), hetgeen leidt tot

$$A_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} A_i x_{ij} + \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \left(A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} A_i x_{ik}\right) ,$$

of

$$A_j = \frac{x_{rj}}{x_{rk}} A_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} A_i \left(x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}\right) . \tag{4.22}$$

Deze laatste vergelijking drukt A_j uit in de nieuwe basisvectoren en daar de ontbinding van een vector op de basisvectoren ondubbelzinnig is (vgl.stelling 4.1 in deel 1), moeten de coëfficiënten in (4.22) de elementen van X_j^* zijn. De nieuwe coëfficiënten van de vectoren, die zowel in de oude als in de nieuwe basis voorkomen, volgen uit de oude coëfficiënten via

$$x_{ij}^* = x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}, \text{ met } i=1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,m, \text{ en } j=0,\ldots,n \tag{4.23}$$

en die van de nieuw opgenomen vector A_k uit

$$x_{rj}^* = \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \qquad (j=0,\ldots,n). \tag{4.24}$$

Voor j = 0 vallen deze formules samen met (4.15) resp. (4.16).

De nieuwe waarden $(c_j - z_j)^* = c_j - z_j^*$ volgen uit de oude door gebruik te maken van (4.10), (4.23) en (4.24):

$$(c_j - z_j)^* = c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} x_{ij}^* c_i - x_{rj}^* c_k = c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{m} \left(x_{ij} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}\right) c_i - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} c_k =$$

$$= c_j - z_j + x_{rj} c_r + \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ik} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{rk} c_r - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} c_k =$$

$$= (c_j - z_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (c_k - z_k) ,$$

dus

$$(4.25) \qquad (c_j - z_j)^* = (c_j - z_j) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} (c_k - z_k).$$

Deze formule heeft dezelfde structuur als (4.15) en (4.23): de nieuwe verschillen worden uit de oude gevonden door deze te verminderen met $\frac{x_{rj}}{x_{rk}}$ maal het oude element behorende bij A_k.

Tenslotte blijkt uit een vergelijking van (4.9) en (4.25) dat $-z_0^*$ uit $-z_0$ gevonden wordt door een transformatie van de vorm (4.25), wanneer men $j = 0$ kiest en voor c_0 de waarde 0 substitueert. De waarde van de constante θ in (4.9) wordt gevonden door een vergelijking van het type (4.13).

Er is dus een grote overeenkomst in alle transformatieformules: van alle vectoren X_j^* wordt één element gevonden door het oude te delen door x_{rk}, terwijl alle andere elementen van de vectoren X_j^* en de nieuwe verschillen $(c_j - z_j)^*$ $(j=0,\ldots,n)$ bepaald worden door de geheel analoge formules (4.15), (4.23) en (4.25).

Wij zijn nu in staat een nieuwe basisoplossing te construeren, wanneer een basisoplossing bekend is en bovendien kunnen wij nagaan welke wijziging de te optimaliseren functie hierdoor ondergaat.

Nog niet beantwoord is de vraag op welke wijze wij een eerste toegelaten basisoplossing vinden. Wij zullen dit antwoord eerst geven voor het geval, waarin het lineaire programmeringsprobleem de volgende speciale vorm bezit:
maximaliseer

$$(4.26) \qquad y = f(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{h=1}^{p} c_h x_h$$

onder de voorwaarden

$$(4.27) \qquad \sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h \leq a_{i0} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

en

$$(4.28) \qquad x_h \geq 0 \qquad (h=1,\ldots,p).$$

De constanten a_{i0} worden bovendien ≥ 0 ondersteld. Voorbeeld 1.2 geeft een situatie, die leidt tot deze speciale vorm.

Om de constructie van een toegelaten basisoplossing te vereenvoudigen wordt aan iedere voorwaarde van (4.27) één variabele toegevoegd en worden de "$\leq$" tekens vervangen door "$=$" tekens. De nieuwe variabele x_{p+i} in de i^{de} vergelijking geeft dan het verschil aan tussen het rechterlid en de waarde die het linkerlid voor een bepaalde combinatie van x_h-waarden aanneemt. Om aan (4.27) te blijven voldoen moeten de toegevoegde variabelen ≥ 0 zijn. De voorwaarden (4.27) zijn nu vervangen door

$$(4.29) \qquad \sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h + x_{p+i} = a_{i0} \qquad (i=1,\ldots,m)$$

en

$$(4.30) \qquad x_{p+i} \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m).$$

De variabelen x_{p+i} noemt men residu- of verschilvariabelen. Het probleem (4.26), (4.28) t/m (4.30) heeft bijna dezelfde gedaante als het probleem (3.1) t/m (3.3) in het begin van § 3 (blz.17). Om het geheel identiek te maken voegen wij de x_{p+i} aan (4.26) toe met coëfficiënt 0, zodat de te maximaliseren functie overgaat in

$$(4.31) \qquad y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

met $n = p+m$ en $c_{p+1} = c_{p+2} = \ldots = c_{p+m} = 0$. Door deze wijziging treden de oorspronkelijke en de verschilvariabelen op dezelfde wijze in het probleem op. Schrijven wij de voorwaarden (4.29) in de vectornotatie (3.5), dan zijn er ook nu n vectoren A_j; de vectoren $A_{p+1},\ldots, A_{p+m}$ zijn echter bijzondere m-dimensionale vectoren; te weten de m eenheidsvectoren $E_1,\ldots,E_m$ van de m-dimensionale ruimte (vgl. § 1 van deel 1).

Bovenstaand probleem heeft de gemakkelijk te verkrijgen toegelaten oplossing

$$\begin{cases} x_h = 0 & \text{voor } h=1,\ldots,p \\ x_{p+i} = a_{i0} & \text{voor } i=1,\ldots,m \end{cases},$$

of

(4.32) $$X' = (0,\ldots,0,\ a_{10},\ldots,a_{m0}) .$$

Dit is een basisoplossing; de bijbehorende basis bestaat uit de vectoren $A_{p+1},\ldots,A_{p+m}(= A_n)$, die tezamen de eenheidsmatrix $\mathcal{J}$ vormen.

Kunnen wij van deze basisoplossing uitgaan, dan zijn de vectoren X_j en de verschillen $c_j - z_j$ zeer eenvoudig te bepalen. Immers (4.6) gaat over in

(4.33) $$X_j = \mathcal{J}^{-1} A_j = \mathcal{J} \quad A_j = A_j .$$

Wegens $c_{p+1} = \ldots = c_{p+m} = 0$ is C_b een nulvector en dus volgt uit (4.10)

(4.34) $$c_j - z_j = c_j \qquad (j=0,\ldots,n).$$

Teneinde de in het voorgaande gegeven bewerkingen, die vereist zijn om vanuit een basisoplossing over te gaan op een andere, systematisch uit te kunnen voeren, vatten wij alle relevante gegevens, dus de vectoren X_j, de verschillen $c_j - z_j$ en de basisvariabelen, samen in een tabel, zoals aangegeven is in tabel 4.1. De basisvariabelen staan in de kolom met het hoofd X_b, welk symbool, in analogie met C_b, die deelvector van $X' = (x_1,\ldots,x_n)$ voorstelt, die de basisvariabelen bevat. Verder is een (strikt genomen niet noodzakelijke) kolom C_b toegevoegd, waarin wij de c-waarden uit (4.31) invullen, die dezelfde indices hebben als de x-variabelen uit de X_b-kolom; bij de oplossing (4.32) zijn dit allemaal nullen, welke in tabel 4.1 door blanco hokjes zijn aangegeven.

In de laatste rij zijn niet de verschillen $c_j - z_j$ opgenomen, doch in aansluiting op een wijd verspreid gebruik, de verschillen $z_j - c_j$. Uit (4.25) blijkt dat de $z_j - c_j$ op dezelfde wijze getransformeerd kunnen worden als de $c_j - z_j$. Voor hogere waarden van de functie

moeten wij nu echter zoeken naar negatieve verschillen $z_j - c_j$.

Gebruik makend van (4.33) en (4.34) is tabel 4.1 ingevuld; blanco hokjes geven weer nullen aan. De oplossing (4.32) kan men gemakkelijk uit de tabel aflezen: de variabelen in de X_b- kolom bezitten de waarden die in de X_0- kolom gegeven zijn; de andere zijn 0.

Tabel 4.1

De eerste toegelaten oplossing

C_b	X_b	X_0	X_1	...	X_k	...	X_p	X_{p+1}	...	X_{p+r}	...	X_{p+m}
	x_{p+1}	a_{10}	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1p}	1				
	.	.	.	...	.	...	.		.			
	.	.	.	...	.	...	.		.			
	.	.	.	...	.	...	.		.			
	.	.	.	...	.	...	.		.			
	x_{p+r}	a_{r0}	a_{r1}	...	a_{rk}	...	a_{rp}			1		
	.	.	.	...	.	...	.				.	
	.	.	.	...	.	...	.				.	
	.	.	.	...	.	...	.				.	
	.	.	.	...	.	...	.				.	
	x_{p+m}	a_{m0}	a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{mp}					1
$z_j - c_j$			$-c_1$	...	$-c_k$	...	$-c_p$					

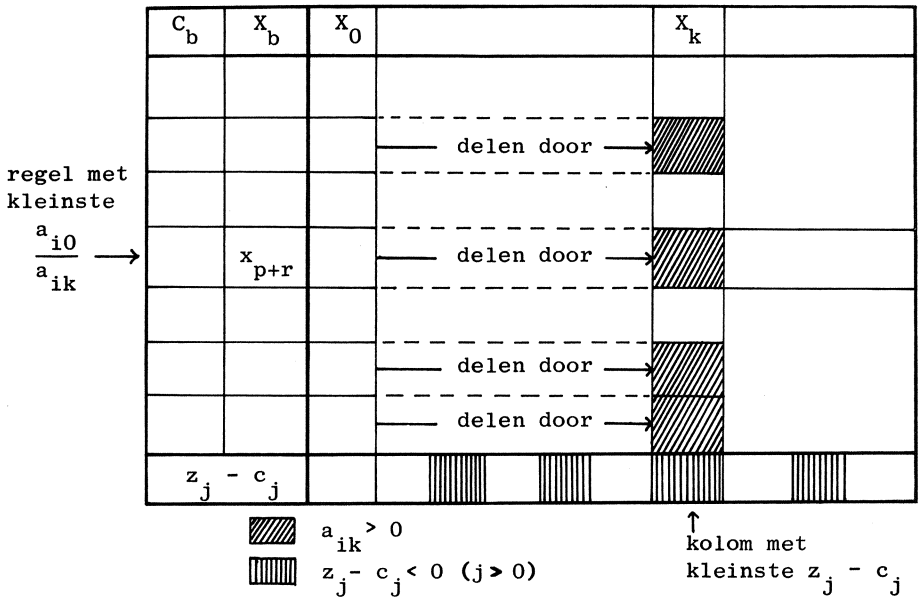
Uitgaande van de in tabel 4.1 gegeven oplossing kan met de formules (4.15),(4.16) en (4.23) t/m (4.25) een nieuwe oplossing geconstrueerd worden. Om te laten zien hoe men de vereiste bewerkingen kan schematiseren, nemen wij voorlopig aan dat de laatste rij één of meer negatieve waarden $z_j - c_j$ $(j > 0)$ bevat. Verder merken wij op dat uit de in paragraaf 3 gemaakte onderstelling, dat het toegelaten gebied X begrensd is, volgt, dat kolommen met een negatieve $(z_j - c_j)$-waarde één of meer positieve elementen x_{ij} bevatten (vgl.blz.46,punt d.).

De tabel, waaruit de nieuwe oplossing kan worden afgelezen, wordt nu als volgt geconstrueerd: bepaal eerst de waarde k, waarvoor $z_j - c_j$ minimaal is; zoek vervolgens het kleinste van de quotiënten a_{i0}/a_{ik} met $a_{ik} > 0$ op. In tabel 4.2 zijn deze twee bewerkingen schematisch

aangegeven.

Tabel 4.2

Berekeningen uit te voeren met de constanten van tabel 4.1



Tabel 4.3 laat zien hoe uit tabel 4.1 de nieuwe tabel ontstaat; hiertoe moet men het volgende doen:

1) vervang in de C_b- en de X_b- kolom c_{p+r} en x_{p+r} door c_k resp.x_k;

2) deel alle elementen uit ▨ door a_{rk};

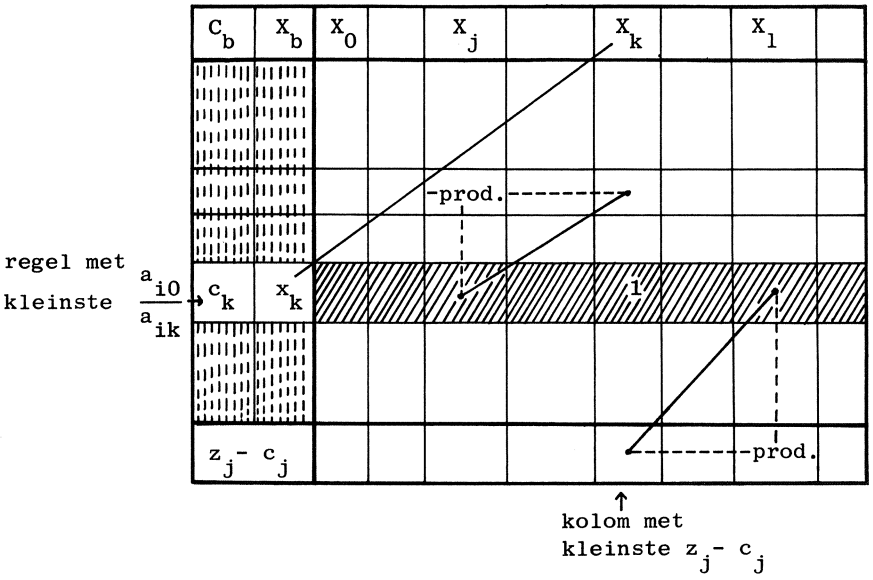
3) verminder alle andere elementen uit de kolommen $X_0,\ldots,X_n$ met de aangegeven produkten (in de kolom X_k komen hierdoor, behalve de in het schema aangegeven 1, slechts nullen te staan);

4) laat de vakjes ▥ ongewijzigd.

Op dezelfde wijze, waarop wij uit tabel 4.1 de oude oplossing konden aflezen, kunnen wij de nieuwe bepalen uit tabel 4.3 . De variabelen in de X_b- kolom bezitten de in de X_0- kolom gegeven waarden; de andere x-en zijn nul. De nieuwe waarde van de functie is te vinden in het laatste vakje van de X_0- kolom.

Tabel 4.3

De tweede toegelaten oplossing



Wanneer de nieuwe tabel eveneens één of meer negatieve $z_j - c_j$ ($j \geq 1$) bevat, kan hetzelfde procédé opnieuw worden toegepast. Ter illustratie zullen wij de berekeningen voor een klein voorbeeld uitvoeren (vgl.voorbeeld 3.1).

Voorbeeld 4.1

Maximaliseer

(4.35) $y = 2x_1 + 3x_2$

onder de voorwaarden

(4.36) $x_1 + 3x_2 \leq 10$,

(4.37) $2x_1 + x_2 \leq 10$,

(4.38) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Toevoeging van de verschilvariabelen x_3 en x_4 leidt tot:

maximaliseer

$$y = 2x_1 + 3x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 ,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 10 ,$$

$$x_1,\ldots,x_4 \geq 0.$$

De basisoplossing, waarmee wij beginnen, is $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 10$. De bijbehorende tabel is 4. 4 . Er blijken negatieve $z_j - c_j$ te zijn; wij voeren dus een transformatie uit. De X_2 - kolom bevat de kleinste $(z_j - c_j)$-waarde; de elementen van X_2 zijn beide positief en het minimum van de quotiënten van de elementen uit dezelfde rijen van de X_0- en de X_2- kolom wordt bereikt in de rij, waarin x_3 voorkomt. In de volgende transformatie wordt dus in de X_b- kolom x_3 door x_2 vervangen.

Tabel 4. 4

De eerste toegelaten oplossing

kleinste $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ ($\rightarrow$r=1) $\longrightarrow$

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
0	x_3	10	1	3	1	0
0	x_4	10	2	1	0	1
$z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0

$\uparrow$

kleinste $z_j - c_j$ ($\rightarrow$k=2)

Tabel 4.5

De tweede toegelaten oplossing

$\longrightarrow$

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
3	x_2	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
0	x_4	$6\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
$z_j - c_j$		10	-1	0	1	0

$\uparrow$

Tabel 4.6

De derde toegelaten oplossing

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
3	x_2	2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
2	x_1	4	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$z_j - c_j$		14	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$

De tabellen 4.5 en 4.6 bevatten resp. de tweede en de derde toegelaten basisoplossing. De $(z_j - c_j)$-rij in tabel 4.6 bevat geen elementen meer, die < 0 zijn, hetgeen suggereert dat de grootst mogelijke waarde van de functie is bereikt. De in fig.4.1 gemaakte tekening toont aan dat dit inderdaad zo is. Het gearceerde gebied geeft de oplossingen aan, welke aan de voorwaarden (4.36) t/m (4.38) voldoen. De onderbroken lijnen behoren bij coördinatengrepen (x_1, x_2), waarvoor de functie dezelfde waarde bezit; de zover mogelijk van de oorsprong gelegen lijn, die nog een punt met het gearceerde gebied gemeen heeft, correspondeert met het maximum dat onder de gestelde voorwaarden kan worden bereikt. De in de tabellen 4.4 , 4.5 en 4.6 aangegeven oplossingen behoren respectievelijk bij de punten O, D en C, hetgeen eenvoudig te verifiëren is.

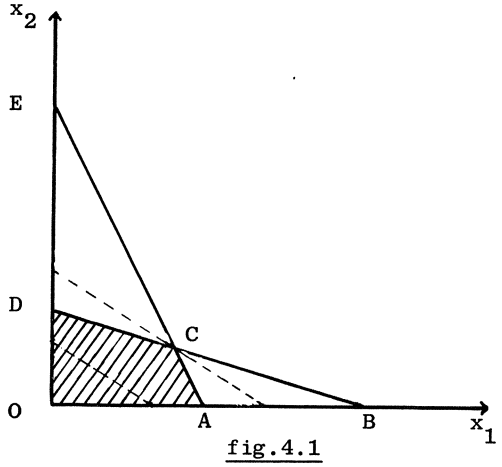


fig.4.1

Toegelaten gebied en maximale waarde van de functie van voorbeeld 4.1

Opmerking 4.3

Uit fig. 4.1 en de achtereenvolgens gedane stappen blijkt dat steeds "aangrenzende" hoekpunten vergeleken worden. Dit komt omdat bij iedere transformatie één basisvariabele 0 wordt gemaakt en één niet-basisvariabele positief. Van de twee niet-basisvariabelen blijft er in iedere stap dus één nul; in de eerste stap is dit x_1, in de tweede stap x_3, zodat respectievelijk langs de rechten $x_1 = 0$ en $x_3 = 0$ gelopen wordt.

Opmerking 4.4

Verschillen $z_j - c_j$, welke behoren bij in de basis opgenomen variabelen, zijn altijd 0. Bestaat de basis uit de vectoren $A_{h_1},\ldots,A_{h_m}$, dan is overeenkomstig (4.10)

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{h_i} x_{ij} = C_b' X_j ,$$

waarin C_b en X_j de gebruikelijke betekenis hebben. Elke vector X_{h_i}, behorend bij basisvector A_{h_i} $(i=1,\ldots,m)$, is dan een eenheidsvector met de 1 op plaats i, zodat

$$C_b' X_{h_i} = c_{h_i}$$

en

$$z_{h_i} - c_{h_i} = 0.$$

Wanneer wij de verschillende onderdelen van iedere stap nog eens expliciet formuleren, dan vinden wij het volgende:

1) bepaal, uitgaande van een toegelaten basisoplossing X_0 met bijbehorende matrix van basisvectoren $\mathfrak{B} = (A_{h_1},\ldots,A_{h_m})$, de vectoren X_j door de transformatie $X_j = \mathfrak{B}^{-1} A_j$ $(j=1,\ldots,n)$; wanneer van een basis van eenheidsvectoren uitgegaan kan worden, zoals tot nu toe steeds het geval was, dan is $\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{I}^{-1} = \mathfrak{I}$ en dus $X_j = A_j$;

2) bepaal de verschillen $z_j - c_j$ voor alle vectoren A_j die niet in de basis zijn opgenomen;

3) wanneer één of meer van de verschillen $z_j - c_j$ negatief zijn, bepaal dan het kleinste van deze verschillen; laat dit bereikt worden voor $j = k$;

4) bepaal het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ voorzover $x_{ik} > 0$ is;

laat dit minimum bereikt worden voor i = r;

5) beschouw als nieuwe basis van de ruimte de oude vectoren, afgezien van A_{h_r}, die wordt vervangen door A_k.

6) druk de vectoren A_j (j=0,...,n) door middel van de transformaties (4.15), (4.16), (4.23) en (4.24) uit in de nieuwe basis; hiermee zijn de nieuwe vectoren X_j^* (j=0,...,n) gevonden;

7) bepaal de nieuwe verschillen $(z_j - c_j)^*$ (j=0,...,n) door middel van de transformaties (4.25);

8) zie punt 3);
enzovoort.

Wij zijn nu in staat de iteraties van de simplexmethode te starten en te vervolgen, mits aan een aantal voorwaarden is voldaan. De gemaakte onderstellingen luiden:

a. de functie moet worden gemaximaliseerd (blz. 17 resp. blz.34);
b. alle variabelen dienen ≥ 0 gekozen te worden (idem);
c. de voorwaarden zijn alle vergelijkingen (blz. 17); deze onderstelling is later vervangen door: de voorwaarden zijn alle ongelijkheden met een $\leq$ teken en een niet-negatief rechterlid (blz.34);
d. het toegelaten gebied $\mathcal{X}$ is begrensd (blz.20);
e. ieder m-tal vectoren A_j (j=1,...,n) is lineair onafhankelijk (blz.27);
f. A_0 kan niet geschreven worden als een lineaire combinatie van minder dan m vectoren A_j (j=1,...,n) (blz.27);
g. minstens één verschil $z_j - c_j$ (j=1,...,n) is negatief (blz.37).

Wat zijn de konsekwenties voor de behandelde iteratiemethode, wanneer aan één of meer van de genoemde onderstellingen niet is voldaan? Wij zullen eerst voor iedere onderstelling afzonderlijk nagaan, wat het weglaten voor gevolgen heeft, daarbij aannemende dat de andere onderstellingen gehandhaafd blijven.

In plaats van a. : de functie moet worden geminimaliseerd.

Het probleem kan tot het behandelde worden teruggebracht door het tegengestelde van de functie te maximaliseren. Uit formule (4.10) blijkt dat men het iteratieproces ook kan aanpassen door in iedere stap niet de vector met de kleinste negatieve waarde van $z_j - c_j$ in de basis op te nemen, maar die met de grootste positieve waarde van $z_j - c_j$. Hierdoor wordt bij iedere stap een lagere waarde van de functie gevonden.

In plaats van g. : alle verschillen $z_j - c_j$ zijn niet-negatief.

Wij hebben reeds opgemerkt, dat formule (4.11) suggereert, dat in dit geval het gezochte maximum is bereikt. Dit is inderdaad zo, getuige de volgende stelling.

Stelling 4.1

Wanneer in een bepaalde stap alle verschillen $z_j - c_j \geq 0$ zijn, is het maximum van de criteriumfunctie bereikt.

Bewijs:

Laten in de beschouwde stap $A_{h_1},\ldots,A_{h_m}$ de basisvectoren zijn. Dan geldt

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_{h_i} \qquad (j=0,\ldots,n). \tag{4.39}$$

Uit $z_j - c_j \geq 0$ voor $j=1,\ldots,n$ volgt

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_{h_i} - c_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n). \tag{4.40}$$

Voor een willekeurige andere basis $A_{k_1},\ldots,A_{k_m}$ kunnen eveneens betrekkingen van het type (4.39) worden opgeschreven. Stel, dat $x_{k_1} = v_{10},\ldots, x_{k_m} = v_{m0}$ een basisoplossing is. Analoog aan (4.39) met $j = 0$ geldt dan

$$(4.41) \qquad A_0 = \sum_{t=1}^{m} v_{t0} A_{k_t} .$$

Substitueert men hierin voor A_{k_t} uitdrukking (4.39), dan is

$$(4.42) \qquad A_0 = \sum_{t=1}^{m} v_{t0} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ik_t} A_{h_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{t=1}^{m} v_{t0} x_{ik_t} \right) A_{h_i} .$$

Aangezien volgens stelling 4.1 uit deel 1 iedere vector op slechts één manier in de basisvectoren $A_{h_1},\ldots,A_{h_m}$ uitgedrukt kan worden, volgt uit (4.39) voor $j = 0$ en (4.42)

$$(4.43) \qquad x_{i0} = \sum_{t=1}^{m} v_{t0} x_{ik_t} .$$

Vermenigvuldiging van beide leden van (4.43) met c_{h_i} en sommering over i geeft

$$\sum_{i=1}^{m} c_{h_i} x_{i0} = \sum_{i=1}^{m} c_{h_i} \sum_{t=1}^{m} v_{t0} x_{ik_t}$$

$$= \sum_{t=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} c_{h_i} x_{ik_t} \right) v_{t0} .$$

Is de oplossing $x_{k_1} = v_{10},\ldots,x_{k_m} = v_{m0}$ toegelaten, dus is $v_{t0} \geq 0$ voor $t=1,\ldots,m$, dan volgt hieruit door toepassing van (4.40)

$$\sum_{i=1}^{m} c_{h_i} x_{i0} \geq \sum_{t=1}^{m} c_{k_t} v_{t0}$$

Bij iedere toegelaten basis behoort dus een functiewaarde, die hoogstens gelijk is aan de gevonden functiewaarde. Combineren wij dit resultaat met de op blz.22 getrokken conclusie dat het optimum voor een basisoplossing wordt bereikt, dan is daarmee de stelling bewezen. Het iteratieproces kan derhalve worden beëindigd zodra alle verschillen $z_j - c_j$ voor $j > 0$ positief of nul zijn.

In plaats van d.:het toegelaten gebied X is niet begrensd.

Daar wij een lineaire functie maximaliseren, kan dit maximum nu oneindig groot worden. Tijdens de iteraties constateren wij dat het maximum oneindig groot is, wanneer er een negatieve $z_j - c_j$ bestaat, waarvoor de bijbehorende kolom geen positieve elementen bevat. Immers volgens (4.13) kan een in de basis op te nemen variabele x_j een waarde krijgen die hoogstens gelijk is aan het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ voor $x_{ij} > 0$. Zijn alle $x_{ij} \leq 0$, dan kan x_j dus willekeurig groot gemaakt worden en volgens (4.11) derhalve de waarde van de functie eveneens. In praktijkproblemen zal dit betekenen dat òfwel het gebruikte model niet realistisch is, òfwel de berekeningen fout zijn.

Veroorzaakt deze situatie dus geen moeilijkheden voor de rekenprocedure, stelling 3.4 behoeft voor problemen met onbegrensde toegelaten gebieden niet meer juist te zijn en evenmin is de optimale oplossing altijd een basisoplossing. Dit kan men inzien door aan te nemen, dat in een bepaalde stap oplossing (4.1) verkregen is en dat voor een bepaalde j geldt $z_j - c_j < 0$ en $X_j \leq 0$. Voor iedere positieve waarde van θ is (4.8) dan een toegelaten oplossing en (4.11) de bijbehorende waarde van de functie. Wegens alle $x_{i0} > 0$ zijn er steeds m+1 variabelen > 0, zodat (4.11) voor geen enkele positieve θ een basisoplossing kan zijn. Verder zullen behalve x_j ook variabelen, waarvoor $x_{ij} < 0$ is, willekeurig groot worden.

In plaats van c.: één of meer voorwaarden zijn vergelijkingen, òfwel ongelijkheden met een "$\geq$"teken, òfwel één of meer rechterleden zijn negatief.

Strikt genomen vervangen wij zo alleen het tweede deel van c.

Aangezien wij ongelijkheden echter steeds in vergelijkingen zullen omzetten is het eerste deel van c. in feite geen beperking.

Van onderstelling c. is gebruik gemaakt bij de constructie van de beginoplossing. De bijvoorwaarden (4.27) werden getransformeerd tot de vergelijkingen (4.29), waaruit de toegelaten basisoplossing (4.32) zonder moeite is af te leiden. De bij deze oplossing behorende basis bestaat uit de m eenheidsvectoren.

Ook wanneer niet aan c. voldaan is, starten wij in de meeste gevallen met een basisoplossing, die de eigenschap bezit dat de bijbehorende basis bestaat uit eenheidsvectoren. Zijn deze reeds alle aanwezig en zijn de rechterleden alle ≥ 0, dan kan direct een toegelaten basisoplossing van het probleem gegeven worden. Is dit niet het geval, dan zorgen wij op kunstmatige wijze voor een dergelijk stelsel.

Laten wij eerst aannemen dat sommige voorwaarden vergelijkingen zijn; verschilvariabelen kunnen nu niet zonder meer toegevoegd worden.

De in de voorwaarden aanwezige vergelijkingen kan men gebruiken om één of meer variabelen te elimineren. Men moet hiermee echter voorzichtig zijn, omdat ook de geëlimineerde variabele(n) in de uiteindelijke oplossing een waarde(n) ≥ 0 moet(en) bezitten. Hiervoor kan gezorgd worden door voor iedere geëlimineerde variabele een extra voorwaarde toe te voegen. Heeft men bijvoorbeeld de voorwaarde

$$a_{t1} x_1 + a_{t2} x_2 + \ldots + a_{tp} x_p = a_{t0} \tag{4.44}$$

en is $a_{tp} \neq 0$, dan kan men schrijven

$$x_p = \frac{1}{a_{tp}} \left(a_{t0} - \sum_{h=1}^{p-1} a_{th} x_h \right), \tag{4.45}$$

waarmee x_p uit de andere voorwaarden kan worden geëlimineerd, terwijl men toevoegt de voorwaarde $x_p \geq 0$ of

$$\frac{1}{a_{tp}} \left(a_{t0} - \sum_{h=1}^{p-1} a_{th} x_h \right) \geq 0. \tag{4.46}$$

Men heeft op deze wijze dus een variabele minder en een ongelijkheid

meer gekregen. *) In het algemeen is deze procedure niet aan te bevelen.

De volgende methode kan men altijd toepassen. Laten de m voorwaarden bestaan uit t vergelijkingen en m-t ongelijkheden:

$$
(4.47)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = a_{10}\,, \\ \quad\vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{tp}x_p = a_{t0}\,, \\ a_{t+1,1}x_1 + a_{t+1,2}x_2 + \ldots + a_{t+1,p}x_p \leq a_{t+1,0}\,, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mp}x_p \leq a_{m0}\,, \end{cases}
$$

waarin de a_{i0} nog steeds ≥ 0 ondersteld worden.

Om dit probleem op te lossen bekijken wij eerst een ander lineair programmeringsprobleem dat er veel op lijkt; te weten:

maximaliseer

$$
(4.48)\qquad w = \sum_{h=1}^{p} c_h x_h - M \sum_{j=1}^{t} \mu_j
$$

onder de voorwaarden

$$
(4.49)\qquad \begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + \mu_1 & & & = a_{10}\,, \\ \quad\vdots & & & \quad\vdots \\ a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots + a_{tp}x_p & + \mu_t & & = a_{t0}\,, \\ a_{t+1,1}x_1 + a_{t+1,2}x_2 + \ldots + a_{t+1,p}x_p & & + x_{p+1} & = a_{t+1,0}\,, \\ \quad\vdots & & & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mp}x_p & & + x_{p+m-t} & = a_{m0}\,, \end{array}
$$

---

*) Zoals wij verderop zullen zien, moet men hier toch weer minstens één extra variabele toevoegen.

en

(4.50) $\quad x_1,\ldots, x_{p+m-t} \geq 0; \quad \mu_1,\ldots,\mu_t \geq 0;$

hierin is M een zeer groot positief getal en zijn $x_{p+1},\ldots,x_{p+m-t}$ de gebruikelijke verschilvariabelen, die aan (4.48) met coëfficient nul toegevoegd kunnen worden.

De optimale oplossing van het nieuwe probleem zal aan de variabelen μ_j een zo klein mogelijke waarde geven. De vorm van het probleem is, afgezien van de coëfficiënten $-M$ voor de variabelen μ_j in de objectfunctie, identiek aan het probleem (4.29) t/m (4.31). Het kan derhalve op de in het voorgaande beschreven wijze opgelost worden, mits wij met de coëfficiënten $-M$ rekening houden.

Bevat de optimale oplossing van het nieuwe probleem geen μ's die ongelijk aan nul zijn, dan is eenvoudig in te zien, dat het ook de optimale oplossing van het oude probleem moet zijn. Immers, vanaf het moment, waarop alle μ-variabelen nul zijn vallen de iteraties in het oude en het nieuwe probleem samen. Bevat de optimale oplossing van het nieuwe probleem bij voldoende groot gekozen M wèl μ's die positief zijn, dan betekent dit, dat het oorspronkelijke probleem geen oplossing bezit, omdat aan de voorwaarden (4.47) en alle variabelen ≥ 0 niet is te voldoen. Zou er namelijk wel een toegelaten oplossing zijn, dan zou deze een hogere waarde van w opleveren. De simplexmethode is dus ook een methode, waarmee men kan onderzoeken of aan een aantal lineaire voorwaarden kan worden voldaan. De μ-variabelen worden wel <u>kunstmatige</u> of <u>artificiële variabelen</u> genoemd.

Zijn er ongelijkheden die niet de geschikte vorm bezitten, zoals bijvoorbeeld de voorwaarde

(4.51) $\quad a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sp}x_p \geq a_{s0}$

met $a_{s0} \geq 0$, dan voegt men eerst een verschilvariabele x_{p+1} toe, zó dat

(4.52) $\quad a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sp}x_p - x_{p+1} = a_{s0}$

en daarna een extra variabele μ, zó dat

(4.53) $\quad a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sp}x_p - x_{p+1} + \mu = a_{s0}$.

De voorwaarde heeft dan weer dezelfde vorm als de in (4.49) opgegeven vergelijkingen. Het resultaat kan dus zijn dat in een voorwaarde zoals (4.51) twee extra variabelen opgenomen worden; t.w. een verschilvariabele die in de functie y de coëfficiënt nul krijgt en een variabele μ, die hierin de coëfficiënt $-M$ krijgt.

Mocht tenslotte een rechterlid negatief zijn, dan kan dit verholpen worden door beide leden van teken om te draaien en het eventuele ongelijkheidsteken te wijzigen.

Opmerking 4.5

In de beschreven methode wordt aan iedere voorwaarde een variabele toegevoegd, waarmee dus ook een eenheidsvector wordt ingevoerd. Wanneer deze eenheidsvector reeds aanwezig is, behoeft uiteraard geen nieuwe vector ingevoerd te worden en kan men ook de bijbehorende μ-variabele weglaten.

In plaats van b.: één of meer variabelen kunnen ook negatieve waarden aannemen.

Een variabele, die alle waarden kan aannemen noemt men een vrije variabele. Komen er onder de voorwaarden vergelijkingen voor, dan zou men ze kunnen elimineren. Gewoonlijk dwingt men ze echter in het behandelde schema door te schrijven:

$$x_j = x_{j1} - x_{j2}, \tag{4.54}$$

waarbij geëist wordt dat $x_{j1} \geq 0$ en $x_{j2} \geq 0$. Dit heeft tot gevolg dat behalve A_j ook de vector $-A_j$ tot de verzameling van A-vectoren gaat behoren. Er is dan niet meer voldaan aan onderstelling e. In de optimale oplossing kan hoogstens òf A_j, òf $-A_j$ voorkomen, daar deze anders geen basisoplossing zou zijn.

In plaats van e.: één of meer stelsels van m vectoren A_j zijn lineair afhankelijk.

Dit betekent dat niet ieder m-tal vectoren als basis gekozen kan worden; er zijn dus minder dan $\binom{n}{m}$ bases en dus ook minder dan $\binom{n}{m}$

basisoplossingen. Het iteratieschema ondervindt hiervan geen moeilijkheden, omdat steeds van de ene basisoplossing op de andere wordt overgestapt.

Het is zelfs mogelijk dat de nog niet met eenheidsvectoren aangevulde voorwaarden bestaan uit een stelsel afhankelijke vergelijkingen. Dan is dus ieder stelsel van m vectoren afhankelijk; na het toevoegen van de eenheidsvectoren is dit natuurlijk niet meer het geval. Een optimale toegelaten oplossing bevat dan μ-variabelen in de basis met de waarde nul, hetgeen impliceert dat niet meer voldaan kan zijn aan voorwaarde f.

In plaats van f.: A_0 kan geschreven worden als lineaire combinatie van minder dan m vectoren A_j.

Het is nu mogelijk een basis te kiezen met de eigenschap dat de ontbinding van A_0 als lineaire combinatie van de basisvectoren één of meer coëfficiënten gelijk aan nul bevat. Een voorbeeld hiervan krijgen wij door voorwaarde (4.36) in voorbeeld 4.1 enigszins te wijzigen.

Voorbeeld 4.2

Maximaliseer

(4.35) $\qquad y = 2x_1 + 3x_2$

onder de voorwaarden

(4.55) $\qquad x_1 + 3x_2 \leq 5$,

(4.37) $\qquad 2x_1 + x_2 \leq 10$,

(4.38) $\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Het gearceerde gebied in fig.4.2 geeft de vectoren (x_1, x_2) aan, die aan de voorwaarden voldoen. De punten A en B uit fig.4.1 vallen nu samen, waardoor er drie rechten door één punt gaan. De vector A_0 is lineair afhankelijk van A_1; schrijven wij A_0 als lineaire combinatie van bijvoorbeeld A_1 en A_2, dan is

(4.56) $\qquad A_0 = 5\ A_1 + 0\ A_2$.

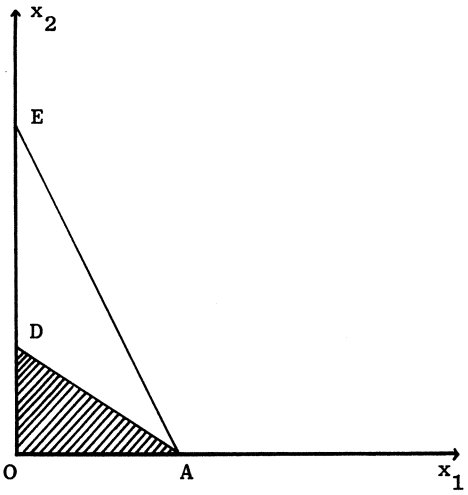


fig.4.2
Toegelaten vectoren (x_1, x_2)

De berekeningen om de optimale oplossing te vinden volgen verderop in tabel 4.7.

Wanneer niet aan voorwaarde f. voldaan is, noemt men het probleem ontaard; basisoplossingen X_0 met elementen gelijk aan nul zijn ontaarde oplossingen.

Uit (4.13) volgt dat het, uitgaande van een ontaarde oplossing, kan voorkomen, dat de waarde van θ niet groter dan 0 kan worden gekozen: de nieuwe functiewaarde z_0^* is dan gelijk aan de oude; alleen de bijbehorende basis is gewijzigd. In theorie is het denkbaar dat de beschreven simplexmethode bij toepassing op ontaarde problemen niet leidt tot de optimale oplossing, maar voortdurend overgaat van de ene op de andere basisoplossing, waarbij de functie steeds dezelfde waarde behoudt. Deze situatie staat bekend onder de naam "cycling".

Voorbeelden hiervan zijn gegeven door A.J.HOFFMAN en E.M.L.BEALE.*) Er bestaan methoden om cycling te voorkomen; aangezien het zelfs moeilijk is een voorbeeld van cycling te construeren, worden deze methoden vrijwel nooit toegepast.

---

*) Het voorbeeld van BEALE is o.a. beschreven in "Linear Programming" door G. HADLEY, Addison Wesley, Reading, (1962), blz. 190-195.

Een niet-ontaarde oplossing gaat over in een ontaarde, wanneer het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ $(x_{ik} > 0)$, (vgl.(4.13)), bereikt wordt voor meer dan één waarde van de index i. De uit de basis te elimineren vector ligt dan niet ondubbelzinnig vast; veelal elimineert men de vector, behorende bij de variabele, die staat op de plaats met de laagste index; de variabele(n), welke bij de andere vector(en) behoort(en) wordt(en) in de volgende stap nul. Behalve deze keuze neemt men ook wel de vector, waarvoor de noemer van de gelijke breuken het grootst is teneinde de invloed van afrondingsfouten te verkleinen.

Een ontaarde oplossing gaat in een niet-ontaarde over, wanneer de rij(en) waarin de ontaarding(en) voorkomt(en) een element(en) < 0 bevat(ten) in de kolom van de in de basis op te nemen vector.

Tabel 4.7 bevat de oplossing van voorbeeld 4.2. Bij de laatste stap zijn de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ aan elkaar gelijk; wij elimineren x_2 en in overeenstemming met het bovenstaande wordt de niet geëlimineerde variabele x_4 in de laatste stap nul.

Tabel 4.7

De oplossing van voorbeeld 4.2

	C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
→	0	x_3	5	1	3	1	0
	0	x_4	10	2	1	0	1
	$z_j - c_j$		0	-2	-3	0	0
					↑		

	C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
→	3	x_2	$1\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
	0	x_4	$8\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
	$z_j - c_j$		5	-1	0	1	0
				↑			

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
2	x_1	5	1	3	1	0
0	x_4	0	0	-5	-2	1
$z_j - c_j$		10	0	3	2	0

In plaats van a.t/m g.: er is niet voldaan aan een combinatie van deze voorwaarden.

Tot nu toe is nagegaan wat de konsekwenties zijn, wanneer aan één van de voorwaarden a.t/m g. niet is voldaan. Een onderzoek van de situaties, waarin twee of meer van de voorwaarden a.t/m g. tegelijkertijd niet vervuld zijn, toont aan dat zich hierbij geen complicaties voordoen, die in het voorgaande niet zijn behandeld.

Hieruit volgt dat alle problemen waarin een lineaire functie moet worden geminimaliseerd of gemaximaliseerd, terwijl de variabelen moeten voldoen aan een aantal lineaire voorwaarden - ongelijkheden of vergelijkingen - opgelost kunnen worden met behulp van het in deze paragraaf beschreven iteratieproces. Wel zal later blijken dat de tot nu toe behandelde vorm van het iteratieproces niet in alle gevallen de meest geschikte is.

Opmerking 4.6

Tot nu toe is ondersteld dat de in de basis op te nemen vector A_k ondubbelzinnig bepaald wordt door na te gaan voor welke waarde van j het verschil $z_j - c_j$ minimaal is (vgl.blz.31, respectievelijk blz.42, punt 3). Uiteraard is het niet uitgesloten dat dit minimum in een iteratie voor meer dan één waarde van j wordt bereikt. Men is dan vrij in de keuze van de op te nemen vector. Gewoonlijk kiest men de vector met de laagste index of die met de hoogste coëfficiënt c_j.

Opmerking 4.7

Het kan voorkomen dat in de optimale oplossing coëfficiënten $z_j - c_j$ gelijk aan nul zijn, welke behoren bij niet in de basis opgenomen vectoren. Formule (4.11) laat zien dat de waarde van de te optimaliseren

functie niet verandert, wanneer een dergelijke vector in de basis wordt opgenomen. In dit geval wordt de optimale waarde derhalve bereikt voor meer dan één basis. Meestal houdt dit in, dat er ook meer dan één optimale oplossing is; noodzakelijk is dit echter niet (vgl.voorbeeld 4.3).

Zijn $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(t)}$ alle optimale basisoplossingen, dan kan iedere optimale oplossing geschreven worden in de vorm

$$X = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i X^{(i)}, \tag{4.57}$$

waarin de λ_i willekeurige getallen zijn, die voldoen aan

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \qquad (i=1,\ldots,t) \tag{4.58}$$

en

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1. \tag{4.59}$$

Opmerking 4.8

Tot nu toe is steeds die vector in de basis opgenomen, waarvoor het verschil $z_j - c_j$ de kleinste negatieve waarde bereikt. Daar de mate waarin de functie toeneemt door $\theta (c_j - z_j)$ wordt bepaald, ligt het meer voor de hand bij iedere stap die vector A_j in de basis op te nemen, waarvoor $\theta(c_j - z_j)$ maximaal is, omdat men dan mag verwachten het maximum in een kleiner aantal stappen te bereiken. In het algemeen is dit inderdaad het geval, doch hier staat tegenover dat de tijd, nodig om één stap uit te voeren, groter wordt; immers voor iedere $z_j - c_j < 0$ moeten nu de elementen $x_{ij} > 0$ opgespoord worden en de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ $(x_{ij} > 0)$ bepaald. Experimentele vergelijkingen suggereren dat de tijdwinst verkregen door het kleinere aantal stappen gemiddeld ruimschoots opweegt tegen de iets langere tijd nodig per stap.*)

---

*) Vergelijk: P.WOLFE and LEOLA CUTLER ," Experiments in Linear Programming", en W.ORCHARD-HAYS and D.M.SMITH," Computational Efficiency in Product Form LP Codes", beide artikelen in R.L.GRAVES and P.WOLFE, Recent Advances in Mathematical Programming, Mc.Graw Hill, New York, (1963).

De bestaande programma's voor electronische rekenmachines gebruiken vrijwel allemaal de kleinste waarde van $z_j - c_j$ als criterium, welke vector bij de volgende stap in de basis opgenomen moet worden.

Opmerking 4.9

Een andere variatie op de behandelde simplexmethode betreft de situatie, waarin bij de constructie van de beginoplossing μ-variabelen worden ingevoerd, bijv. zoals in (4.49) de variabelen $\mu_1,\ldots,\mu_t$. Passen wij de simplexmethode in dit geval rechtstreeks toe, dan houden wij bij de berekening van de verschillen $z_j - c_j$ rekening met alle coëfficiënten uit (4.48). Men kan de methode ook in twee fasen toepassen.

In de eerste fase wordt getracht de waarden van de μ-variabelen zo klein mogelijk te maken door

$$(4.60) \qquad -M \sum_{j=1}^{t} \mu_j$$

te maximaliseren, of, wat op hetzelfde neerkomt, door $-\sum_{j=1}^{t} \mu_j$ te maximaliseren; de waarde van M behoeft dan niet te worden gespecificeerd. Aangezien men variabelen $\mu_1,\ldots,\mu_t$, welke uit de basis geëlimineerd zijn, daarin niet voor de tweede keer behoeft toe te laten, worden geëlimineerde μ-vectoren uit het tableau geschrapt. Zodra de functie nul geworden is, gaat men over op de tweede fase; blijkt het maximum van (4.60) negatief te zijn, dan bezit het oorspronkelijke probleem geen toegelaten oplossing.

De tweede fase begint met de berekening van nieuwe $z_j - c_j$, nu uitgaand van de vector C_b, welke behoort bij de oorspronkelijke functie; dus bij het deel $\sum_{h=1}^{p} c_h x_h$ uit (4.48). Bevat de X_b-kolom aan het einde van de eerste fase geen μ-variabelen meer, dan gaan de transformaties verder op de gebruikelijke wijze.

Zijn er nog wel μ-variabelen in de X_b-kolom, dan kan men dit niet zonder meer doen. Er zouden namelijk variabelen $\mu_1,\ldots,\mu_t$, die in het

begin van de tweede fase basisvariabelen met de waarde nul zijn, in een volgende stap positief kunnen worden, waardoor men een niet-toegelaten oplossing zou krijgen. Men kan dit als volgt voorkomen. Bepaal eerst de in de basis op te nemen vector; laat dit A_k zijn. Ga dan na of er een μ-variabele geëlimineerd kan worden; dit kan wanneer er een element $\neq 0$ is in de A_k-kolom en in de rij van een μ-variabele. Bestaat er zo'n element, dus > 0 of < 0, vervang dan de μ-variabele door x_k en schrap de corresponderende vector uit het tableau. De nieuwe oplossing is weer een toegelaten basisoplossing. Is zo'n element er niet, bepaal dan de te elimineren vector op de gebruikelijke manier. *)

De hier beschreven methode, waarbij men eerst een toegelaten basisoplossing zoekt, zonder daarbij rekening te houden met de coëfficiënten van de te optimaliseren functie , en pas daarna de optimale, noemt men de twee fasen-simplexmethode. Deze verdient de voorkeur boven de rechtstreekse toepassing van de simplexmethode op het probleem (4.48) t/m (4.50).

Wij besluiten deze paragraaf met twee rekenvoorbeelden.

Voorbeeld 4.3

Maximaliseer

$$y = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \tag{4.61}$$

onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 18 \,, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 30 \,, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \,, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0,\ x_3 \text{ vrij.} \end{aligned} \tag{4.62}$$

Toevoeging van de verschilvariabelen x_4 en x_5, van de artificiële variabelen μ_1 en μ_2 en vervanging van x_3 door $x_{31} - x_{32}$ leidt tot:

---

*) Deze methode is ontleend aan: G.F.HADLEY en M.A.SIMONNARD, A simplified two-phase technique for the simplex-method, Naval Research Logistics Quarterly, 6 ,(1959) ,blz.221-226; vergelijk ook hfdst.5 van het op blz. 52 genoemde boek van HADLEY.

maximaliseer

(4.63) $$y = 2x_1 + x_2 + 3x_{31} - 3x_{32} + 0\,x_4 + 0\,x_5 - M\mu_1 - M\mu_2$$

onder de voorwaarden

(4.64)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_{31} - 3x_{32} + x_4 &= 18, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_{31} - 2x_{32} - x_5 + \mu_1 &= 30, \\ x_1 + x_2 + x_{31} - x_{32} + \mu_2 &= 10, \\ x_1, x_2, x_{31}, x_{32}, x_4, x_5, \mu_1 \text{ en } \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

De basisoplossing waarmee we beginnen, is $x_1 = x_2 = x_{31} = x_{32} = x_5 = 0$, $x_4 = 18$, $\mu_1 = 30$, $\mu_2 = 10$. We passen de twee fasen-methode toe, waarbij in de eerste fase $-\mu_1 - \mu_2$ gemaximaliseerd wordt. Tabel 4.8 bevat de stappen van de eerste fase ($x_6 = \mu_1$, $x_7 = \mu_2$) .

Tabel 4.8

De eerste fase in de oplossing van voorbeeld 4.3

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5	X_6	X_7
0	x_4	18	1	2	3	-3	1	0	0	0
-1	x_6	30	3	4	2	-2	0	-1	1	0
-1	x_7	10	1	1	1	-1	0	0	0	1
$z_j - c_j$		-40	-4	-5	-3	3	0	1	0	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5	~~X_6~~	X_7
0	x_4	3	$-\frac{1}{2}$	0	2	-2	1	$\frac{1}{2}$	~~$-\frac{1}{2}$~~	0
0	x_2	$\frac{15}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	~~$\frac{1}{4}$~~	0
-1	x_7	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	~~$-\frac{1}{4}$~~	1
$z_j - c_j$		$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	~~$\frac{5}{4}$~~	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5	X_7
0	x_{31}	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
0	x_2	$\frac{27}{4}$	$\frac{7}{8}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0
-1	x_7	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1
$z_j - c_j$		$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5	X_7
0	x_{31}	$\frac{8}{3}$	0	0	1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$
0	x_1	$\frac{14}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	0	0	1

De eerste tabel van de tweede fase wordt verkregen door in de laatste tabel van de eerste fase in de C_b - kolom de elementen van (4.61) in te vullen en met behulp hiervan en van (4.10) de nieuwe $z_j - c_j$ te berekenen. Men krijgt dan tabel 4.9.

Tabel 4.9

Begintabel van de tweede fase in de oplossing van voorbeeld 4.3

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5
3	x_{31}	$\frac{8}{3}$	0	0	1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
2	x_1	$\frac{14}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$		20	0	0	0	0	0	1

In deze tabel zijn alle $z_j - c_j \geq 0$, zodat de begintabel van de tweede fase reeds de optimale oplossing bevat. De maximale waarde van de functie is 20 en wordt bereikt voor $x_1 = \frac{14}{3}$, $x_2 = \frac{8}{3}$, $x_{31} = \frac{8}{3}$; de overige variabelen nul.

Verder leert tabel 4.9 ons, dat dit niet de enige optimale oplossing is. Immers ook x_4 kan in de basis opgenomen worden. Doen wij dit, dan blijkt vervolgens dat ook x_{32} basisvariabele gemaakt kan worden. Tabel 4.10 bevat de resultaten. Bij de laatste stap ontstaat er wel een nieuwe basis, echter geen nieuwe oplossing, want die is in beide tableau's dezelfde: $x_1 = 10$, $x_4 = 8$, overige variabelen nul.

Tabel 4.10

Optimale basisoplossingen van voorbeeld 4.3

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5
0	x_4	8	0	0	3	-3	1	1
1	x_2	0	0	1	-1	1	0	-1
2	x_1	10	1	0	2	-2	0	1
$z_j - c_j$		20	0	0	0	0	0	1

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5
0	x_4	8	0	3	0	0	1	-2
-3	x_{32}	0	0	1	-1	1	0	-1
2	x_1	10	1	2	0	0	0	-1
$z_j - c_j$		20	0	0	0	0	0	1

Deze oplossing vindt men ook, wanneer, tegen de regels in, de vector A_5 in de basis wordt opgenomen om A_{32} te vervangen. De bijbehorende tabel is dan tabel 4.11.

Tabel 4.11

Nog een optimale basis van voorbeeld 4.3

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5
0	x_4	8	0	1	2	-2	1	0
0	x_5	0	0	-1	1	-1	0	1
2	x_1	10	1	1	1	-1	0	0
$z_j - c_j$		20	0	1	-1	1	0	0

De algemene oplossing van voorbeeld 4.3 wordt gegeven door

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

waarbij $\lambda + \gamma = 1$, $\lambda \geq 0$ en $\gamma \geq 0$.

Voorbeeld 4.4

Maximaliseer

(4.65) $$y = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

onder de voorwaarden

(4.66)
$$\begin{aligned} -4x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10, \\ x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1, \ldots, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Toevoeging van de verschilvariabelen x_4, x_5 en x_6 en de μ-variabelen x_7 en x_8 transformeert (4.66) tot

$$
\begin{aligned}
-4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad\qquad + x_7 \qquad &= 0\,, \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad\qquad + x_8 &= 0\,, \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad &= 10\,, \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad &= 5\,, \\
x_1, \ldots, x_8 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

In de eerste fase maximaliseren wij $-x_7-x_8$. De eerste tabel van deze fase is tegelijkertijd de laatste, omdat de functiewaarde direct nul is (vgl.tabel 4.12).

Tabel 4.12

De eerste fase in de oplossing van voorbeeld 4.4

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
-1	x_7	0	-4	-1	2	-1	0	0	1	0
-1	x_8	0	3	1	-2	0	0	0	0	1
0	x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	0
0	x_6	5	1	1	0	0	0	1	0	0
$z_j - c_j$		0	1	0	0	1	0	0	0	0

Om de eerste tabel van de tweede fase te vinden worden in de C_b-kolom van tabel 4.12 de coëfficiënten uit (4.65) ingevuld en de $(z_j - c_j)$-waarden door de nieuwe vervangen. In de eerste stap wordt x_7 geëlimineerd ten gunste van x_1, in de tweede x_8 ten gunste van x_3. De optimale oplossing luidt: $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_5 = \frac{5}{2}$, $x_1 = x_4 = x_6 = 0$; de maximale waarde van de functie is $\frac{25}{2}$. De schema's, behorende bij de opeenvolgende stappen staan in tabel 4.13.

Tabel 4.13

De tweede fase in de oplossing van voorbeeld 4.4

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
0	x_7	0	-4	-1	2	-1	0	0	1	0
0	x_8	0	3	1	-2	0	0	0	0	1
0	x_5	10	1	1	1	0	1	0	0	0
0	x_6	5	1	1	0	0	0	1	0	0
$z_j - c_j$		0	-3	-2	-1	0	0	0	0	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_8
3	x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0
0	x_8	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	1
0	x_5	10	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0
0	x_6	5	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	0
$z_j - c_j$		0	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	0	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
3	x_1	0	1	0	0	1	0	0
1	x_3	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	0
	x_5	10	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1	0
	x_6	5	0	1	0	-1	0	1
$z_j - c_j$		0	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	0	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
3	x_1	0	1	0	0	1	0	0
1	x_3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$
	x_5	$\frac{5}{2}$	0	0	0	-1	1	$-\frac{3}{2}$
2	x_2	5	0	1	0	-1	0	1
$z_j - c_j$		$\frac{25}{2}$	0	0	0	2	0	$\frac{5}{2}$

5. Toepassingen van lineaire programmering.

De meest bekende toepassingen van lineaire programmering kunnen in de volgende groepen worden ingedeeld:

1. mengproblemen: het zo goedkoop mogelijk samenstellen van een mengsel (veevoeder, diëet, legering), dat aan bepaalde eisen moet voldoen, uit verschillende grondstoffen waarvan de samenstelling en de prijs bekend zijn;

2. toewijzingsproblemen: het vaststellen op welke wijze beschikbare capaciteiten (machines, kapitaal, grond, arbeiders) verdeeld moeten worden over verschillende mogelijke produktieprocessen, opdat de winst of een andere grootheid optimaal wordt;

3. transportproblemen: het vervoeren van een produkt (graan, olie, erts, lege spoorwagens) vanuit een aantal opslagplaatsen naar een aantal bestemmingen, zodanig dat de transportkosten minimaal zijn.

Naast deze groepen bestaan er nog talloze andere toepassingen. In deze paragraaf komen wij terug op de voorbeelden 1.1, 1.2 en 1.5 uit § 1. Verder geven wij nog een drietal andere voorbeelden. Op transportproblemen wordt in § 9 ingegaan.

Voorbeeld 5.1. Een mengprobleem.

Het probleem uit voorbeeld 1.1 luidde na de wiskundige vertaling:

minimaliseer

$$y = 60x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 47x_4 \tag{5.1}$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,, \tag{5.2}$$

$$50x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 36x_4 \geq 18\,, \tag{5.3}$$

$$x_1,\ldots,x_4 \geq 0. \tag{5.4}$$

Het krijgt een geschikte vorm om de beschreven simplexmethode te beginnen, wanneer wij "y minimaliseren"vervangen door "-y maximaliseren," aan (5.3) de verschilvariabele x_5 toevoegen met een minteken om er een vergelijking van te maken, vervolgens in (5.2) en (5.3) de μ-variabelen x_6 en x_7 opnemen en tenslotte deze variabelen aan de functie toevoegen met coëfficiënt -M. Het resultaat is dan:
maximaliseer

$$-y = -60x_1 - 30x_2 - 35x_3 - 47x_4 - Mx_6 - Mx_7 \tag{5.5}$$

onder de voorwaarden

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 1, \tag{5.6}$$

$$50x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 36x_4 - x_5 + x_7 = 18, \tag{5.7}$$

$$x_1\ldots, x_7 \geq 0. \tag{5.8}$$

Wordt de twee fasen-methode toegepast, dan vinden wij de optimale oplossing na drie transformaties. Tabel 5.1 bevat de eerste en de optimale oplossing. Het goedkoopste mengsel dat aan de voorwaarden voldoet is $\frac{9}{13}$ ton B met $\frac{4}{13}$ ton D; het kost $35\frac{3}{13}$ per ton en bevat, wegens $x_5 = 0$, precies 18% tin.

Tabel 5.1

De eerste en de optimale oplossing van voorbeeld 5.1

c_b	x_b	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-1	x_6	1	1	1	1	1	0	1	0
→ -1	x_7	18	50	10	15	36	-1	0	1
$z_j - c_j$		-19	-51	-11	-16	-37	1	0	0

↑

c_b	x_b	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-30	x_2	$\frac{9}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$\frac{21}{26}$	0	$\frac{1}{26}$
-47	x_4	$\frac{4}{13}$	$\frac{20}{13}$	0	$\frac{5}{26}$	1	$-\frac{1}{26}$
$z_j - c_j$		$-35\frac{3}{13}$	$\frac{50}{13}$	0	$\frac{45}{26}$	0	$\frac{17}{26}$

Voorbeeld 5.2. Een mengprobleem (vgl.voorbeeld 2.1, deel 5).

Een fabrikant van veevoeder heeft voor de fabricage van zijn produkt een aantal grondstoffen tot zijn beschikking; van elk van deze grondstoffen is de gedeeltelijke samenstelling en de prijs per 100 kg. opgegeven in tabel 5.2. De eisen, die aan de samenstelling van het veevoeder opgelegd worden, zijn opgesomd in tabel 5.3.

Tabel 5.2

Gegevens over de beschikbare grondstoffen

	Percentages						
	Vocht	Verteerbaar ruw eiwit	Eiwit	Ruw vet	Zetmeel	Ruwe celstof	Prijs per 100 kg.
Rogge	9,5	6,6	7,9	1,2	49,7	1,7	22,75
Milocorn	8,5	5,7	7,4	2,3	52,1	2,4	22,35
Paardebonen	10,0	15,4	17,5	1,0	46,9	5,6	30,25
Sojaschroot	8,1	29,8	33,0	0,6	48,9	4,5	38,25
Cocoskoeken	7,1	11,8	14,0	7,0	54,7	11,5	32,50
Palmpitschroot	8,1	12,7	13,2	1,8	43,0	18,0	26,50
Negerzaadschilfers	7,3	20,2	22,8	3,6	41,7	12,2	32,50

Tabel 5.3

Eisen, opgelegd aan de samenstelling van het veevoeder

Ingrediënten	Maximaal percentage	Minimaal percentage
Rogge	20	
Milocorn	15	
Paardebonen	7	
Sojaschroot		5
Cocoskoeken		2
Palmpitschroot		8
Negerzaadschilfers	10	
Vocht	8,6	
Verteerbaar ruw eiwit		12
Eiwit		14,7
Ruw vet		1,8
Zetmeel		42
Ruwe celstof	8,4	

De fabrikant wil de mengverhouding van de grondstoffen zò kiezen, dat aan de in tabel 5.3 gespecificeerde eisen is voldaan, terwijl de totale kosten aan grondstoffen minimaal zijn. Om dit probleem wiskundig te kunnen formuleren onderstellen wij dat de fabrikant 100 kg. veevoeder wil produceren. Verder geven wij de gebruikte aantallen kilogrammen van de in tabel 5.2 genoemde grondstoffen aan met $x_1,\ldots,x_7$.

De kosten bedragen bij deze mengverhouding

$$y = 0{,}2275x_1 + 0{,}2235x_2 + 0{,}3025x_3 + 0{,}3825x_4 + \tag{5.9}$$
$$+ 0{,}3250x_5 + 0{,}2650x_6 + 0{,}3250x_7.$$

De variabelen $x_1,\ldots,x_7$ kunnen niet negatief gekozen worden en moeten voldoen aan de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 100. \tag{5.10}$$

Uit tabel 5.3 kunnen we afleiden aan welke voorwaarden de variabelen

$x_1,\ldots,x_7$ verder nog moeten voldoen. Deze voorwaarden luiden:

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_1 \leq 20\,, \\
x_2 \leq 15\,, \\
x_3 \leq 7\,, \\
x_4 \geq 5\,, \\
x_5 \geq 2\,, \\
x_6 \geq 8\,, \\
x_7 \leq 10\,, \\
0{,}095x_1+0{,}085x_2+0{,}100x_3+0{,}081x_4+0{,}071x_5+0{,}081x_6+0{,}073x_7 \leq 8{,}6\,, \\
0{,}066x_1+0{,}057x_2+0{,}154x_3+0{,}298x_4+0{,}118x_5+0{,}127x_6+0{,}202x_7 \geq 12\,, \\
0{,}079x_1+0{,}074x_2+0{,}175x_3+0{,}330x_4+0{,}140x_5+0{,}132x_6+0{,}228x_7 \geq 14{,}7\,, \\
0{,}012x_1+0{,}023x_2+0{,}010x_3+0{,}006x_4+0{,}070x_5+0{,}018x_6+0{,}036x_7 \geq 1{,}8\,, \\
0{,}497x_1+0{,}521x_2+0{,}469x_3+0{,}489x_4+0{,}547x_5+0{,}430x_6+0{,}417x_7 \geq 42\,, \\
0{,}017x_1+0{,}024x_2+0{,}056x_3+0{,}045x_4+0{,}115x_5+0{,}180x_6+0{,}122x_7 \leq 8{,}4.
\end{array}\right. \qquad (5.11)
$$

Het probleem luidt dus: minimaliseer (5.9) onder de bijvoorwaarden (5.10), (5.11) en $x_j \geq 0$ $(j=1,\ldots,7)$. Toepassing van de simplexmethode geeft de volgende optimale oplossing (in 3 decimalen nauwkeurig):

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = 20{,}000 & x_4 = 20{,}038 \\
x_2 = 15{,}000 & x_5 = \ 6{,}567 \\
x_3 = \ 7{,}000 & x_6 = 31{,}395 \\
 & x_7 = \ 0{,}000.
\end{array} \qquad (5.12)
$$

De kosten bedragen bij de optimale oplossing 28,138 per 100 kg. Voegen wij aan de voorwaarden (5.11) met een $\leq$ teken een verschilvariabele toe met een plusteken, aan de andere één met een minteken en noemen wij deze variabelen respectievelijk $x_8,\ldots,x_{20}$, dan hebben ze in de optimale oplossing de waarden

(5.13)
$$\begin{array}{lll} x_8 = 0{,}000 & x_{12} = 4{,}567 & x_{16} = 1{,}986 \\ x_9 = 0{,}000 & x_{13} = 23{,}395 & x_{17} = 0{,}891 \\ x_{10} = 0{,}000 & x_{14} = 10{,}000 & x_{18} = 0{,}000 \\ x_{11} = 15{,}038 & x_{15} = 0{,}093 & x_{19} = 5{,}929 \\ & & x_{20} = 0{,}000. \end{array}$$

Men kan met behulp van (5.11) eenvoudig verifiëren, dat (5.12) en (5.13) met elkaar in overeenstemming zijn. Uit (5.13) volgt dat van de grondstoffen rogge, milocorn en paardebonen zoveel gebruikt wordt als nog juist is toegestaan. Van sojaschroot, cocoskoeken en palmpitschroot wordt meer gebruikt dan minimaal vereist wordt, terwijl negerzaadschilfers in het geheel niet in de optimale samenstelling voorkomen. Verder blijkt het percentage vocht 0,093 lager te zijn dan maximaal was toegestaan; de andere waarden in (5.13) kunnen op overeenkomstige wijze worden geïnterpreteerd.

Het aantal voorwaarden, afgezien van de eisen $x_j \geq 0$, bedroeg in dit voorbeeld 14; de optimale oplossing werd in 15 stappen gevonden.

Voorbeeld 5.3. Een produktieprobleem.

In voorbeeld 1.2 werd een eenvoudig produktieprobleem herleid tot: maximaliseer

(5.14)
$$y = 6x_1 + 4x_2$$

onder de voorwaarden

(5.15)
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 3600 , \\ 10x_1 + 4x_2 \leq 3600 , \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Het toegelaten gebied is getekend in fig.5.1. Schuift men de isowinstlijn y=constant op in de richting "van de oorsprong af", dan blijkt het maximum in het punt C te worden bereikt. De coördinaten

van dit punt zijn $x_1 = 106$, $x_2 = 635$; de brutowinst bedraagt 3.176.

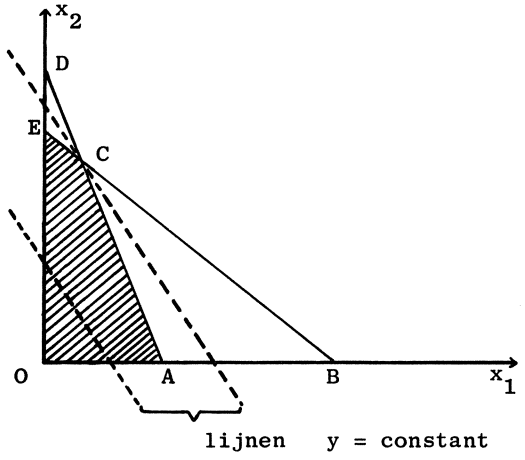


fig.5.1

Het toegelaten gebied in voorbeeld 5.3.

De berekeningen met de simplexmethode verlopen geheel analoog aan die in voorbeeld 4.1. Tabel 5.4 bevat de optimale oplossing. De bovengenoemde optimale waarden van x_1 en x_2 zijn de op gehele getallen afgeronde waarden uit de X_0-kolom.

Tabel 5.4

De optimale oplossing van voorbeeld 5.3

c_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
4	x_b	$\frac{10800}{17}$	0	1	$\frac{5}{17}$	$-\frac{2}{17}$
6	x_1	$\frac{1800}{17}$	1	0	$-\frac{2}{17}$	$\frac{5}{34}$
$z_j - c_j$		$\frac{5400}{17}$	0	0	$\frac{8}{17}$	$\frac{7}{17}$

Voorbeeld 5.4. Een produktieprobleem.

De drie tot dusver behandelde voorbeelden waren één-stapsbeslissingsproblemen. Het volgende doet eerder denken aan een meer-stapsbeslissingsprobleem; wij zullen het echter als één-stapsprobleem behandelen en oplossen.

Stel dat wij belast zijn met de personeelsvoorziening van een bedrijf. In een periode van 8 jaar, die over 2 jaar begint, zijn achtereen volgens 48, 48, 48, 51, 56, 56, 58 en 53 personen nodig voor een bepaalde functie. Van het huidige personeel kunnen hiervoor geen mensen vrijgemaakt worden. Men dient derhalve nieuwe mensen aan te trekken en deze op te leiden. De opleiding voor de functie duurt twee jaar en er kan dus nog juist een groep voor het eerst betreffende jaar opgeleid worden. De totale opleidingscapaciteit bedraagt 72 personen per jaar. Na het eerste studiejaar blijft de helft van het aantal leerlingen over om het tweede jaar te volgen. Ook bij het opgeleide personeel vindt verloop plaats, waardoor een jaar na het einde van de opleiding nog $\frac{2}{3}$ deel van de opgeleiden beschikbaar is en twee jaar na het einde de helft. Onder diegenen, die dan nog in dienst zijn, vindt geen verloop meer plaats.

Als eenheid van kosten nemen wij de opleidingskosten van iemand, die een volledige opleiding heeft gevolgd. De opleidingskosten van iemand die na een jaar afvalt, bedragen de helft hiervan. Het is toegestaan meer mensen op te leiden dan er direct nodig zijn, terwijl het ook kan gebeuren dat in een bepaald jaar ten gevolge van een teruglopend aantal plaatsen sommige krachten overtollig worden. In beide gevallen worden de betreffende personen op een wachtlijst gezet en krijgt men per jaar een bedrag uitgekeerd, dat gelijk is aan tweemaal de opleidingskosten per persoon. Een vacature die niet vervuld kan worden veroorzaakt ieder jaar een verlies, dat op viermaal de opleidingskosten per persoon geschat wordt. De vraag is nu hoeveel personen er ieder jaar met een opleiding dienen te beginnen, opdat de totale kosten minimaal zijn.*)

Het tijdsbestek waarin dit probleem loopt omvat 10 perioden, n.l. de acht jaren, waarin voor personeel gezorgd moet worden, en de twee voorafgaande jaren. De eerstgenoemde acht jaren beschouwen wij als de periode 1 t/m 8; de op die periode betrekking hebbende variabelen krijgen de overeenkomstige indices. De twee andere jaren beschouwen wij respectievelijk als de "min eerste" en de "nulde" periode;

---

*) De salariskosten van degenen die in actieve dienst zijn, behoeven wiskundig gezien niet als afzonderlijke term in de kosten opgenomen te worden, daar men deze kan verwerken in de termen ten gevolge van tekorten en van overschotten.

de bij die jaren behorende variabelen krijgen de indices -1, respectievelijk 0.

Stel dat in de min eerste periode $2x_{-1}$ personen de opleiding beginnen, in de nulde periode $2x_0$, enzovoort tot en met $2x_6$ personen in de zesde periode *). In de zevende en achtste periode zullen geen leerlingen meer aangenomen worden, aangezien hiervan toch geen profijt meer kan worden getrokken. De (eventuele) tekorten in de perioden 1 t/m 8 geven wij aan met $t_1,\ldots,t_8$ en de (eventuele) overtollige krachten met $r_1,\ldots,r_8$. De gevraagde aantallen personen zijn $n_1,\ldots,n_8$ en de aantallen open blijvende plaatsen van de totale opleidingscapaciteit k bedragen $u_{-1},\ldots,u_6$.

Als er in de min eerste periode $2x_{-1}$ mensen de opleiding beginnen en in de nulde periode $2x_0$, dan is in de laatstgenoemde periode het aantal op te leiden personen $x_{-1} + 2x_0$; enzovoort . De opleidingscapaciteit in het zevende jaar kan buiten beschouwing blijven omdat deze in ieder geval voldoende is om de in het zesde jaar begonnen en dan nog aanwezige leerlingen op te vangen.

In fig.5.2 zijn de verschillende perioden met de bijbehorende variabelen aangegeven.

nummer periode	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
variabelen	x_{-1},u_{-1}	x_0,u_0	x_1,u_1	x_2,u_2	x_3,u_3	x_4,u_4	x_5,u_5	x_6,u_6		
constanten			n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
variabelen			r_1,t_1	r_2,t_2	r_3,t_3	r_4,t_4	r_5,t_5	r_6,t_6	r_7,t_7	r_8,t_8

fig.5.2

De verschillende perioden met de bijbehorende variabelen.

Tussen de ingevoerde variabelen bestaan de volgende relaties:

---

*) Wij geven deze aantallen aan met $2x_{-1}$, $2x_0$, etc., omdat dan, gezien het verloop tijdens de opleiding, juist resp. x_{-1}, x_0, etc. personen in het bedrijf kunnen gaan werken in de opeenvolgende jaren.

$$
(5.16)\quad
\begin{cases}
x_{-1} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_1 + t_1 & = n_1 , \\
\frac{2}{3} x_{-1} + & x_0 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_2 + t_2 & = n_2 , \\
\frac{1}{2} x_{-1} + & \frac{2}{3} x_0 + & x_1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_3 + t_3 & = n_3 , \\
\frac{1}{2} x_{-1} + & \frac{1}{2} x_0 + & \frac{2}{3} x_1 + & x_2 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_4 + t_4 & = n_4 , \\
\frac{1}{2} x_{-1} + & \frac{1}{2} x_0 + & \frac{1}{2} x_1 + & \frac{2}{3} x_2 + & x_3 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_5 + t_5 & = n_5 , \\
\frac{1}{2} x_{-1} + & \frac{1}{2} x_0 + & \frac{1}{2} x_1 + & \frac{1}{2} x_2 + & \frac{2}{3} x_3 + & x_4 & & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_6 + t_6 & = n_6 , \\
\frac{1}{2} x_{-1} + & \frac{1}{2} x_0 + & \frac{1}{2} x_1 + & \frac{1}{2} x_2 + & \frac{1}{2} x_3 + & \frac{2}{3} x_4 + & x_5 & & & & & & & & & & & & & & & & & - r_7 + t_7 & = n_7 , \\
\frac{1}{2} x_{-1} + & \frac{1}{2} x_0 + & \frac{1}{2} x_1 + & \frac{1}{2} x_2 + & \frac{1}{2} x_3 + & \frac{1}{2} x_4 + & \frac{2}{3} x_5 + & x_6 & & & & & & & & & & & & & & & & - r_8 + t_8 & = n_8 ,
\end{cases}
$$

$$
(5.17)\quad
\begin{cases}
2 x_{-1} & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_{-1} & = k , \\
x_{-1} + & 2 x_0 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_0 & = k , \\
& x_0 + & 2 x_1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_1 & = k , \\
& & x_1 + & 2 x_2 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_2 & = k , \\
& & & x_2 + & 2 x_3 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_3 & = k , \\
& & & & x_3 + & 2 x_4 & & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_4 & = k , \\
& & & & & x_4 + & 2 x_5 & & & & & & & & & & & & & & & & & + u_5 & = k , \\
& & & & & & x_5 + & 2 x_6 & & & & & & & & & & & & & & & & + u_6 & = k .
\end{cases}
$$

De vergelijkingen (5.16) geven voor de perioden 1 t/m 8 het verband weer tussen de variabelen, waarmee de personeelssituatie beschreven wordt. De algemene vorm luidt: beschikbare krachten verminderd met overtollige krachten en vermeerderd met het tekort is gelijk aan het aantal nodige krachten. De vergelijkingen (5.17) geven het verband weer tussen het aantal gebruikte en het aantal open plaatsen van de opleidingscapaciteit voor de perioden -1 t/m 6.

De te optimaliseren functie wordt gevormd door de kosten die geminimaliseerd moeten worden. Nemen wij in de periode -1 $2x_{-1}$ leerlingen aan, dan zijn er volgens de gemaakte onderstellingen in de

periode 0 nog x_{-1} over, zodat de totale opleidingskosten van deze leerlingen $\frac{3}{2}\,x_{-1}$ zijn. De overige termen in de kostenfunctie geven geen moeilijkheden; de kostenfunctie luidt

$$y = \frac{3}{2}\sum_{j=-1}^{6} x_j + 2\sum_{j=1}^{8} r_j + 4\sum_{j=1}^{8} t_j . \tag{5.18}$$

Vullen wij de waarden van $n_1,\ldots,n_8$ en k in en draaien wij (5.18) weer van teken om, waarna wij -y gaan maximaliseren, dan ontstaat een lineair programmeringsprobleem in de gebruikelijke vorm. De coëfficiënten van de variabelen $t_1,\ldots,t_8$ en $u_{-1},\ldots,u_6$ vormen tezamen een volledig stelsel eenheidsvectoren, zodat een eerste toegelaten oplossing direct kan worden opgeschreven. Met behulp van de simplexmethode wordt de optimale oplossing in acht stappen gevonden ; deze luidt

$$\begin{cases} x_{-1} = 36,\ x_0 = 18,\ x_1 = 18,\ x_2 = 12,\ x_3 = 12,\ x_4 = 6,\ x_5 = 6, \\ r_8 = 2,\ t_1 = 12,\ t_2 = 6,\ u_1 = 18,\ u_2 = 30,\ u_3 = 36,\ u_4 = 48, \\ u_5 = 54 \text{ en } u_6 = 66, \text{ terwijl de overige variabelen alle nul zijn.} \end{cases}$$

Wij moeten dus in de min eerste periode beginnen met de opleiding van 72 personen, in de nulde met de opleiding van 36 personen en dan achtereenvolgens met de opleiding van 36, 24, 24, 12 en nog eens 12 personen. In de achtste periode zijn er twee overtollige krachten, terwijl er in de eerste periode een tekort bestaat van 12 personen en in de tweede periode een tekort van 6 personen.

Aan deze probleemstelling kan in velerlei opzichten een meer algemene vorm gegeven worden. Zo kan men rekening houden met de kosten, nodig om leerlingen te werven door één of meer extra termen in de kostenfunctie op te nemen. Verder kan men er rekening mee houden dat niet iedereen de studie in hetzelfde aantal jaren voltooit. Een andere generalisatie betreft het geval, waarin een deel van de nu opgeleide personen later zelf kan gaan opleiden, waardoor de opleidingscapaciteit vergroot kan worden en men dus voor de opgeleide personen moet kiezen tussen direct inschakelen in het produktieproces of verder scholen tot

opleiders (vgl.blz.94, deel 7A).

Hoewel het in dit voorbeeld behandelde probleem een opleidingsprobleem genoemd zou kunnen worden, hebben wij het de naam produktieprobleem gegeven, omdat de vorm representatief is voor een gehele klasse van produktieproblemen, die betrekking hebben op een aantal perioden. Wat de vorm betreft heeft het ook enige overeenkomst met voorbeeld 5.5.

Opmerking 5.1

In paragraaf 6 zal blijken waarom men bij de oplossing van probleem 5.4 beter de zogenaamde herziene simplexmethode kan gebruiken dan de in paragraaf 4 beschreven simplexmethode.

Voorbeeld 5.5. Een inkoop- en voorraadkostenprobleem.

De wiskundige vertaling van voorbeeld 1.5 leidde in § 1 tot:

minimaliseer

$$y = \sum_{j=1}^{t} p_j x_j + c_1 \sum_{j=1}^{t} \left[\sum_{i=1}^{j} x_i - \left(\sum_{i=1}^{j-1} d_i + \frac{1}{2} d_j \right) \right] \tag{5.19}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{i=1}^{j} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} d_i \leq k \qquad (j= 1,\ldots,t), \tag{5.20}$$

$$\sum_{i=1}^{j} x_i \geq \sum_{i=1}^{j} d_i \qquad (j= 1,\ldots,t), \tag{5.21}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j= 1,\ldots,t). \tag{5.22}$$

Wij kunnen dit probleem in een voor de simplexberekeningen geschikt uitgangspunt brengen door aan de voorwaarden (5.20) verschilvariabelen x_{t+j} $(j=1,\ldots,t)$ toe te voegen en de termen $\sum_{i=1}^{j-1} d_i$ naar het rechterlid te brengen en door in de voorwaarden (5.21) verschilvariabelen x_{2t+j} $(j=1,\ldots,t)$ met een minteken en μ-variabelen x_{3t+j} $(j=1,\ldots,t)$

op te nemen.

Op het aantal μ-variabelen kan aanzienlijk worden bespaard, wanneer wij na het toevoegen van de variabelen x_{t+j} en x_{2t+j} eerst nog een transformatie uitvoeren met de vergelijkingen, afkomstig van ongelijkheden met een $\geq$ teken. Bepaal hiertoe het grootste rechterlid van deze vergelijkingen (dat is in ons geval $\sum_{i=1}^{t} d_i$), draai vervolgens de andere vergelijkingen van teken om en tel tenslotte de vergelijking met het grootste rechterlid er bij op. De voorwaarden (5.20) en (5.21) zijn dan overgegaan in

$$\sum_{i=1}^{j} x_i + x_{t+j} = k + \sum_{i=1}^{j-1} d_i \qquad (j=1,\ldots,t), \tag{5.23}$$

$$\sum_{i=j+1}^{t} x_i + x_{2t+j} - x_{3t} = \sum_{i=j+1}^{t} d_i \qquad (j=1,\ldots,t-1) \tag{5.24}$$

en

$$\sum_{i=1}^{t} x_i - x_{3t} = \sum_{i=1}^{t} d_i \,. \tag{5.25}$$

In het stelsel (5.23) t/m (5.25) zijn alle eenheidsvectoren aanwezig, uitgezonderd de eenheidsvector met een één op de laatste plaats, terwijl de rechterleden alle ≥ 0 zijn. Wij behoeven derhalve slechts één μ-variabele in vergelijking (5.25) in te voeren, aan te geven met x_{3t+1}, waardoor de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{t} x_i - x_{3t} + x_{3t+1} = \sum_{i=1}^{t} d_i \tag{5.26}$$

ontstaat. Het stelsel voorwaarden, dat na de transformatie verkregen is, bevat nu niet t μ-variabelen, doch slechts één. De berekeningen kunnen verder op de gebruikelijke wijze worden uitgevoerd.

Voorbeeld 5.6. In repen snijden van grondmateriaal.

Een veel voorkomend probleem kan soms in de volgende vorm gegoten worden. Men beschikt over grondmateriaal, dat bestaat uit rollen (papier, bladtin) of platen (ijzer) van een bepaalde breedte of van verschillende, gegeven, breedten. Voor de verkoop of voor de eigen produktie heeft men rollen respectievelijk platen nodig van allerlei breedten en deze worden gemaakt uit het grondmateriaal door dit op de beschikbare snijmachines op maat te snijden. Hierbij zal meestal afval ontstaan, dat òfwel weggegooid wordt, òfwel verkocht wordt tegen lagere prijzen, òfwel opnieuw verwerkt moet worden tot grondmateriaal. Daar hiermee verliezen gepaard gaan, zal men trachten het snijden zo gunstig mogelijk te doen.

Stel dat het grondmateriaal van een fabriek bestaat uit rollen van van een standaardlengte en van 100 cm. en 130 cm. breedte. Er zijn 20 rollen van 35 cm.,40 van 40 cm. en 20 van 45 cm. breedte nodig.

Gevraagd wordt op welke wijze deze uit het grondmateriaal vervaardigd kunnen worden, zodanig dat de totale oppervlakte van de restanten minimaal is. Dit criterium kan natuurlijk slechts dan zinvol zijn, wanneer de waarde van de restanten lineair afhangt van de breedte. Aangezien de goedkoopste oplossing van dit probleem zou kunnen betekenen, dat er van een bepaald type rol zeer veel meer gemaakt wordt dan nodig is, eisen wij bovendien nog dat van alle breedten hoogstens twee keer het nu gevraagde aantal rollen gemaakt mag worden.

Men kan rollen op verschillende wijzen uit het grondmateriaal snijden. Bijvoorbeeld kan men uit een rol van 100 cm. breedte één rol van 35 cm. en één rol van 45 cm. snijden; de rest is dan 20 cm. breed. Of men kan uit een rol van 130 cm. twee rollen van 35 cm. snijden en één van 40 cm., waarbij de rest eveneens 20 cm. bedraagt. Wij beperken ons tot combinaties met een restbreedte < 35 cm.*). Tabel 5.5 bevat een overzicht van de mogelijke combinaties met de bijbehorende restbreedten.

---

*) Men kan laten zien, dat andere niet in de optimale oplossing voorkomen.

Tabel 5.5

Mogelijke produktie-combinaties

combinaties / breedte	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}
35	2	1	1	0	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0
40	0	1	0	2	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1
45	0	0	1	0	1	2	0	0	1	0	1	2	0	1	2
restbreedte	30	25	20	20	15	10	25	20	15	15	10	5	10	5	0
	uit 100 cm.						uit 130 cm.								

Vergelijken wij in tabel 5.5 de combinaties P_1 en P_7, dan zien wij dat deze beide alleen goede rollen leveren van 35 cm., maar dat de rest bij P_1 30 cm. bedraagt en bij P_7 25 cm. In de optimale oplossing zal P_1 dus zeker niet gebruikt worden, zodat wij deze mogelijkheid van het begin af aan buiten beschouwing kunnen laten. Hetzelfde volgt voor P_4 uit een vergelijking met P_{13}. Andere combinaties kunnen niet zonder meer weggelaten worden; wel is bijvoorbeeld P_{11} voordeliger dan P_5, terwijl er meer goede rollen geproduceerd worden, maar door de voorwaarden met betrekking tot de maximaal toegelaten produktie kan het toch gebeuren, dat P_5 wel in de optimale oplossing aanwezig is, maar P_{11} niet. Alleen de produktie-combinaties P_1 en P_4 worden dus geschrapt. *)

Wanneer wij x_j rollen volgens combinatie P_j snijden, dan luidt de wiskundige formulering van het probleem als volgt:

minimaliseer

$$y = 25x_2 + 20x_3 + 15x_5 + 10x_6 + 25x_7 + 20x_8 + 15x_9 + 15x_{10} + 10x_{11} + \quad (5.27)$$
$$+ 5x_{12} + 10x_{13} + 5x_{14}$$

onder de voorwaarden

---

*) Een uitvoeriger beschouwing over het elimineren van combinaties is gegeven door H.W.van den MEERENDONK, J.A.G.M.KERBOSCH, P.MEDEMA en J.H.SCHOUTEN , Some computational aspects of the trimloss problem, Statistica Neerlandica, 17, (1963), p. 37 - 47.

$$(5.28)\quad x_2+x_3 \quad +3x_7+2x_8+2x_9+ x_{10}+x_{11}+ x_{12} \geq 20,$$

$$(5.29)\quad x_2 \quad +x_5 \quad + x_8 \quad +2x_{10}+x_{11} \quad +3x_{13}+2x_{14}+ x_{15} \geq 40,$$

$$(5.30)\quad x_3+x_5+2x_6 \quad + x_9 \quad +x_{11}+2x_{12} \quad + x_{14}+2x_{15} \geq 20,$$

$$(5.31)\quad x_2+x_3 \quad +3x_7+ 2x_8+2x_9+ x_{10}+x_{11}+ x_{12} \leq 40,$$

$$(5.32)\quad x_2 \quad +x_5 \quad + x_8 \quad +2x_{10}+x_{11} \quad +3x_{13}+2x_{14}+ x_{15} \leq 80,$$

$$(5.33)\quad x_3+x_5+2x_6 \quad + x_9 \quad +x_{11}+2x_{12} \quad + x_{14}+2x_{15} \leq 40,$$

$$(5.34)\quad x_j \geq 0 \quad \text{voor} \quad j=2,3,\ldots,15.$$

Om het probleem in de standaardvorm te krijgen maximaliseren wij -y , voegen wij aan (5.28) t/m (5.33) de verschilvariabelen x_{16} t/m x_{21} toe om er vergelijkingen van te maken en worden de uit (5.28) t/m (5.30) ontstane vergelijkingen op de in voorbeeld 5.5 beschreven wijze getransformeerd. Het probleem luidt dan :

maximaliseer

$$(5.35)\quad -y= -25x_2- 20x_3- 15x_5- 10x_6- 25x_7-20x_8- 15x_9- 15x_{10}- 10x_{11} + -5x_{12}- 10x_{13}-5x_{14}- Mx_{22}$$

onder de voorwaarden

$$(5.36)\quad -x_3+x_5 \quad -3x_7- x_8-2x_9+ x_{10} \quad - x_{12}+3x_{13}+2x_{14}+ x_{15}+x_{16}-x_{17} = 20,$$

$$(5.37)\quad x_2 \quad +x_5 \quad + x_8 \quad +2x_{10}+x_{11} \quad +3x_{13}+2x_{14}+ x_{15} \quad -x_{17}+x_{22} = 40,$$

$$(5.38)\quad x_2-x_3 \quad -2x_6 \quad + x_8- x_9+2x_{10} \quad -2x_{12}+3x_{13}+ x_{14}- x_{15} \quad -x_{17}+x_{18} = 20,$$

$$(5.39)\quad x_2+x_3 \quad +3x_7+2x_8+2x_9+ x_{10}+x_{11}+ x_{12} \quad +x_{19} = 40,$$

$$(5.40)\quad x_2 \quad +x_5 \quad + x_8 \quad +2x_{10}+x_{11} \quad +3x_{13}+2x_{14}+ x_{15} \quad +x_{20} = 80,$$

$$(5.41)\quad x_3+x_5+2x_6 \quad + x_9 \quad +x_{11}+2x_{12} \quad + x_{14}+2x_{15} \quad +x_{21} = 40,$$

$$(5.42)\quad x_j \geq 0 \text{ voor } j = 2,3,\ldots,22.$$

Hierin is x_{22} een μ-variabele en M een groot positief getal.

De vectoren A_j zijn in dit voorbeeld zes-dimensionaal; een basis bestaat uit zes vectoren en er zijn in een basisoplossing dus hoogstens zes positieve elementen.

Tabel 5.6 bevat de startoplossing van de berekeningen, die met de simplexmethode in één fase zijn uitgevoerd (vgl. blz.48). De tabellen 5.7 t/m 5.11 bevatten de volgende stappen van het iteratieproces (blanco hokjes geven nullen aan). De μ-variabele x_{22} wordt in de derde stap geëlimineerd en is derhalve vanaf tabel 5.9 weggelaten. In de eerste en vierde stap ontstaan ontaardingen en in de derde stap verdwijnt er een.

Tabel 5.6

De uitgangstabel

	C_b	X_b	X_0	X_2	X_3	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{17}	X_{16}	X_{22}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
→		x_{16}	20		-1	1		-3	-1	-2	1		-1	3	2	1	-1	1					
	-M	x_{22}	40	1		1			1		2	1		3	2	1	-1		1				
		x_{18}	20	1	-1		-2		1	-1	2		-2	3	1	-1	-1			1			
		x_{19}	40	1	1			3	2	2	1	1	1								1		
		x_{20}	80	1		1			1		2	1		3	2	1						1	
		x_{21}	40		1	1	2			1		1	2		1	2							1
	z_j-c_j			25	20	15	10	25	20	15	15	10	5	10	5								
			-40M	-M		-M			-M		-2M	-M		-3M	-2M	-M	M						

↑

Tabel 5.7

De eerste verbeterde oplossing

	C_b	X_b	X_0	X_2	X_3	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{17}	X_{16}	X_{22}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
	-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
	-M	x_{22}	20	1	1			3	2	2	1	1	1					-1	1				
→		x_{18}	0	1		-1	-2	3	2	1	1		-1		-1	-2		-1		1			
		x_{19}	40	1	1			3	2	2	1	1	1								1		
		x_{20}	60	1	1			3	2	2	1	1	1				1	-1				1	
		x_{21}	40		1	1	2			1		1	2		1	2							1
	z_j-c_j		$-\frac{200}{3}$	25	$\frac{70}{3}$	$\frac{35}{3}$	10	35	$\frac{70}{3}$	$\frac{65}{3}$	$\frac{35}{3}$	10	$\frac{25}{3}$		$-\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3}$					
			-20M	-M	-M			-3M	-2M	-2M	-M	-M	-M					M						

↑

Tabel 5.8

De tweede verbeterde oplossing

	C_b	X_b	X_0	X_2	X_3	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{17}	X_{16}	X_{22}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
	-10	x_{13}	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			
→	-M	x_{22}	20		1	1	2			1		1	2		1	2			1	-1			
	-25	x_7	0	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			
		x_{19}	40		1	1	2			1		1	2		1	2		1		-1	1		
		x_{20}	60		1	1	2			1		1	2		1	2	1			-1		1	
		x_{21}	40		1	1	2			1		1	2		1	2							1
	$z_j - c_j$		$-\frac{200}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{100}{3}$			10		10	20		10	20	$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{3}$		$-\frac{35}{3}$			
			-20M		-M	-M	-2M			-M		-M	-2M		-M	-2M				M			
													↑										

Tabel 5.9

De derde verbeterde oplossing

	C_b	X_b	X_0	X_2	X_3	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{17}	X_{16}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
	-10	x_{13}	$\frac{40}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$					
	- 5	x_{12}	10		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$	1			$-\frac{1}{2}$			
→	-25	x_7	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$			$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$			
		x_{19}	20															1		1		
		x_{20}	40														1				1	
		x_{21}	20																1			1
	$z_j - c_j$		$-\frac{800}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$										$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{3}$	$-\frac{5}{3}$			
																			↑			

Tabel 5.10

De vierde verbeterde oplossing

c_b	x_b	x_0	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}	x_{16}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
-10	x_{13}	$\frac{40}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$		1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$					
- 5	x_{12}	20	1	1			3	2	2	1	1	1					-1				
	x_{18}	20	2	1	-1	-2	6	4	3	2	1			-1	-2		-2	1			
	x_{19}	20															1		1		
	x_{20}	40														1				1	
→	x_{21}	0	-2	-1	1	2	-6	-4	-3	-2	-1			1	2		2				1
$z_j - c_j$		$-\frac{700}{3}$	$\frac{50}{3}$	15	$\frac{35}{3}$	10	10	$\frac{20}{3}$	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{3}$			$\frac{5}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	5				

↑

Tabel 5.11

De vijfde verbeterde oplossing

c_b	x_b	x_0	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}	x_{16}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
-10	x_{13}	$\frac{40}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$				$-\frac{1}{6}$
- 5	x_{12}	20	1	1			3	2	2	1	1	1					-1				
	x_{18}	20																1			1
	x_{19}	20															1		1		
	x_{20}	40														1				1	
	x_{15}	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	1		1				$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$-\frac{700}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$										$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{3}$				$\frac{5}{3}$

Tabel 5.11 bevat een optimale oplossing, zodat de gestelde vraag als volgt beantwoord kan worden: snijdt $\frac{40}{3}$ rol volgens combinatie P_{13} en 20 rollen volgens combinatie P_{12}; dus in totaal $\frac{100}{3}$ rol van 130 cm. Men krijgt dan 20 rollen van 35 cm., 40 rollen van 40 cm. en 40 rollen van 45 cm.; er worden van de afmetingen 35 cm. en 40 cm. precies voldoende rollen gemaakt en van de afmeting 45 cm. 20 te veel, hetgeen in overeenstemming is met het feit dat volgens tabel 5.11 de verschilvariabelen x_{19}, x_{20} en x_{21} resp. de waarden 20, 40 en 0 bezitten.

Ter illustratie van het gestelde in opmerking 4.8 (vgl. blz. 55), lossen wij dit probleem nu ook nog op met behulp van het criterium $\theta(z_j - c_j)$. In iedere stap wordt dus die vector in de basis opgenomen, waarvoor $\theta(z_j - c_j)$ minimaal is. De uitgangstabel is weer tabel 5.6, terwijl de tabellen 5.12 t/m 5.14 de volgende stappen bevatten. De eerste vector die nu in de basis opgenomen wordt is A_{11}, omdat voor deze vector $\theta(z_j - c_j)$ minimaal is, namelijk 40 (10 - M); voor de vector A_{13} is $\theta(z_j - c_j) = \frac{20}{3}$ (10 - 3M), wat groter is dan 40 (10 - M). De μ - variabele x_{22} wordt direct geëlimineerd.

Tabel 5.12

De eerste verbeterde oplossing

	c_b	X_b	X_0	X_2	X_3	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{17}	X_{16}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	X_{21}
→		x_{16}	20		-1	1		-3	-1	-2	1		-1	3	2	1	-1	1				
	-10	x_{11}	40	1		1			1		2	1		3	2	1	-1					
		x_{18}	20	1	-1		-2		1	-1	2		-2	3	1	-1	-1		1			
		x_{19}	0		1	-1		3	1	2	-1		1	-3	-2	-1	1			1		
		x_{20}	40														1				1	
		x_{21}	0	-1	1		2		-1	1	-2		2	-3	-1	1	1					1
	$z_j - c_j$		-400	15	20	5	10	25	10	15	-5		5	-20	-15	-10	10					

↑

Tabel 5.13

De tweede verbeterde oplossing

	c_b	x_b	x_0	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}	x_{16}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
	- 5	x_{14}	10		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
	-10	x_{11}	20	1	1			3	2	2	1	1	1					-1				
		x_{18}	10	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1			
		x_{19}	20															1		1		
		x_{20}	40													1					1	
→		x_{21}	10	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				1
	$z_j - c_j$		-250	15	$\frac{25}{2}$	$\frac{25}{2}$	10	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$		$\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$		$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$				
													↑									

Tabel 5.14

De derde verbeterde oplossing

c_b	x_b	x_0	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{17}	x_{16}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}
- 5	x_{14}	$\frac{40}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-2	-1	-1				1	1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{3}$
-10	x_{11}	$\frac{40}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	4	3	2	2	1		1		-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$				$-\frac{2}{3}$
	x_{18}	20																1			1
	x_{19}	20															1		1		
	x_{20}	40														1				1	
- 5	x_{12}	$\frac{20}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	-1		-1		1	-1		1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				$\frac{2}{3}$
$z_j - c_j$		$-\frac{700}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$										$\frac{10}{3}$	$\frac{25}{3}$				$\frac{5}{3}$

Tabel 5.14 bevat weer een optimale oplossing. Deze luidt als volgt: snijdt $\frac{40}{3}$ rol volgens combinatie P_{11}, $\frac{20}{3}$ rol volgens combinatie P_{12} en $\frac{40}{3}$ rol volgens combinatie P_{14}. Ook met dit produktieproces verkrijgt men 20 rollen van 35 cm., 40 rollen van 40 cm. en 40 rollen van 45 cm. De optimale oplossing is hier in drie stappen bereikt, terwijl er eerst vijf stappen nodig waren.

Ook het hier gegeven voorbeeld kan op velerlei wijzen gegeneraliseerd worden. Zo behoeft men niet de totale restbreedte te minimaliseren, maar kan men ook een kostenfunctie, die van de restbreedten afhangt, in sommige gevallen minimaliseren (bijv. in de situatie waarin restbreedten kleiner dan a cm. als afval beschouwd moeten worden, terwijl restbreedten die groter zijn dan of gelijk aan a cm. tegen een bepaalde prijs verkocht kunnen worden). Ook zou men kunnen eisen dat de verhoudingen tussen de aantallen rollen van de verschillende breedten aan zekere voorwaarden moeten voldoen. Het in de praktijk toepassen van de beschreven methode brengt in veel gevallen nog grote moeilijkheden met zich mee. Een dieper gaande bespreking van het probleem is o.a. gegeven door P.C. GILMORE en R.E.GOMORY.*) Zij beschrijven o.a. twee- en drie-dimensionale snijproblemen. Twee-dimensionale snijproblemen ontstaan, als men gegeven hoeveelheden rechthoekige platen van gegeven lengten en breedten wil snijden uit rechthoekig grondmateriaal van bepaalde standaardafmetingen. Tot een drie-dimensionaal probleem komt men, als men de verliezen wil minimaliseren, die optreden bij het zagen van rechthoekige blokken uit standaardblokken.

---

*) P.C.GILMORE and R.E.GOMORY, A linear programming approach to the cutting-stock problem, Operations Research, 9, (1961), p.849-859 én Operations Research, 11, (1963), p.863-888; dezelfde auteurs, Multistage cutting-stock problems of two and more dimensions, Operations Research, 13, (1965), p. 94-120.

6. De herziene simplexmethode.

Op blz. 54 merkten wij op dat met de in §4 beschreven vorm van de simplexmethode weliswaar in principe alle lineaire programmeringsproblemen opgelost kunnen worden, maar dat deze vorm in veel gevallen beslist niet de meest geschikte is. In het bijzonder geldt dit voor problemen, welke op rekenautomaten opgelost moeten worden. Er zijn dan ook talloze verbeteringen in het rekenprocédé aangebracht waarvan de belangrijkste zijn verwerkt in de in deze paragraaf te bespreken "herziene simplexmethode".

Een nadere beschouwing van de punten 1) tot en met 8) op de bladzijden 42-43 leert, dat men bij iedere iteratie alleen nodig heeft:

a) de waarden van $z_j - c_j$ om na te gaan welke vector in de basis opgenomen moet worden (punt 2));
b) de vector X_k wanneer A_k in de basis wordt opgenomen (punt 4));
c) de vector X_0 (punt 4)).

Deze grootheden kunnen als volgt worden berekend. Laat in een bepaalde stap $\mathfrak{B}$ de matrix der basisvectoren zijn. Wij vatten de elementen van C met dezelfde indices als de basisvectoren weer samen tot de vector C_b; dan is volgens (4.10) z_j gelijk aan

$$z_j = C'_b X_j \quad (j=0,..,n). \tag{6.1}$$

Verder is (vgl. (4.6))

$$X_j = \mathfrak{B}^{-1} A_j \quad (j=0,...,n). \tag{6.2}$$

Substitutie van (6.2) in (6.1) levert

$$z_j = C'_b \mathfrak{B}^{-1} A_j \quad (j=0,...,n). \tag{6.3}$$

Wij zien derhalve dat in iedere stap de vereiste gegevens gevonden kunnen worden, mits naast de oorspronkelijke gegevens $A_0, A_1, \ldots, A_n$

en C, de inverse $\mathcal{B}^{-1}$ van de matrix $\mathcal{B}$ der basisvectoren bekend is. Het is dus niet noodzakelijk bij iedere stap alle vectoren X_j (j=0,..,n) te berekenen, zoals in de in §4 behandelde vorm van de simplexmethode gebeurt; het berekenen van $\mathcal{B}^{-1}$ is voldoende.

Deze gedachtengang wordt in de herziene simplexmethode toegepast: in plaats van alle vectoren X_j transformeert men in iedere iteratie de matrix $\mathcal{B}^{-1}$. Hoewel dit niet expliciet tot uitdrukking gekomen is, wordt $\mathcal{B}^{-1}$ ook in §4 in iedere stap bepaald. Volgens punt 1) op blz. 42 worden steeds de vectoren $X_j = \mathcal{B}^{-1}A_j$ uitgerekend. Nu bevinden zich onder de vectoren A_j de m eenheidsvectoren E_i, zodat ook de produkten $\mathcal{B}^{-1}E_i$ in iedere stap bekend zijn. Voegt men de eenheidsvectoren samen tot de eenheidsmatrix $\mathcal{J}$, dan volgt hieruit dat het simplextableau, zoals het o.a. in de tabellen 4.1 en 4.3 is aangegeven, in iedere iteratie de matrix

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{J} = \mathcal{B}^{-1} \tag{6.4}$$

bevat en dat deze afgelezen kan worden uit de kolommen van het tableau, die behoren bij de eenheidsvectoren in de uitgangstabel.

Men kan dus volstaan met het toepassen van de in §4 gegeven transformatieformules op deze kolommen en transformeert dan de inverse van de matrix van basisvectoren. Gewoonlijk past men de formules tegelijkertijd toe op X_0 en $\mathcal{B}^{-1}$.

Een andere overweging die in de herziene simplexmethode is verwerkt, heeft betrekking op de te maximaliseren functie

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{6.5}$$

Deze betrekking kan behandeld worden als een extra bijvoorwaarde. Wij voegen dan de vergelijking

$$-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + x_{n+1} = 0 \tag{6.6}$$

toe aan de bijvoorwaarden en maximaliseren vervolgens x_{n+1} in plaats van (6.5), hetgeen wegens de toegevoegde vergelijking op hetzelfde neerkomt. Het aantal voorwaarden is hierdoor met één toegenomen, maar de te maximaliseren functie is bijzonder eenvoudig. De nieuwe C-vector is een (n+1)- dimensionale vector met een 1 op de plaats van het laatste element en voor het overige uitsluitend nullen. De variabele x_{n+1} onderscheidt zich van de andere variabelen doordat het een <u>vrije</u> variabele is. Ook de behandeling tijdens de berekeningen is enigszins anders.

Laten wij voorlopig onderstellen dat de voorwaarden de vorm (4.29) bezitten en dat er dus geen μ-variabelen aanwezig zijn; de bij de verschilvariabelen $x_{p+1},\ldots,x_n$ behorende c-coëfficiënten in (6.5) zijn nul. Vergelijking (6.6) wordt als $(m+1)^{ste}$ voorwaarde aan het stelsel (4.29) toegevoegd, waardoor het overgaat in

$$(6.7)\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{p} a_{ih}\, x_h + x_{p+i} = a_{i0} \qquad (i=1,\ldots,m)\ , \\ -\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j + x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

In de gebruikelijke beginoplossing is x_{n+1} een basisvariabele die de waarde 0 bezit. Omdat wij trachten x_{n+1} te maximaliseren, dus positief te maken, laten wij ook in alle volgende stappen x_{n+1} in de basis zitten; deze variabele speelt dus niet mee bij de bepaling welke variabele uit de basis moet worden geëlimineerd.

De vector C_b , die nu (m+1)-dimensionaal is, heeft door deze procedure steeds de vorm (0,...,0,1). Het in (6.3) vereiste produkt $C_b' \mathfrak{B}^{-1}$ is in iedere iteratie $(0,\ldots,0,1)\,\mathfrak{B}^{-1}$ en is derhalve gelijk aan de laatste rij van $\mathfrak{B}^{-1}$.

Wij passen nu de genoemde ideeën beide toe, nog steeds aannemend dat er geen μ-variabelen zijn. Zij X_0 een toegelaten basisoplossing en $\mathfrak{B}^{-1}$ de inverse van de bijbehorende matrix van basisvectoren. Bij de herziene simplexmethode bestaat een iteratie uit de volgende onderdelen:

1) zoek de elementen van de laatste rij uit $\mathcal{B}^{-1}$ op;
2) bepaal de verschillen $z_j - c_j = C_b' \mathcal{B}^{-1} A_j$;
3) wanneer één of meer van de verschillen $z_j - c_j$ negatief zijn, bepaal dan het kleinste van deze verschillen; laat dit bereikt worden voor j=k;
4) bepaal X_k met behulp van $X_k = \mathcal{B}^{-1} A_k$;
5) bepaal het minimum van de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ voorzover $x_{ik} > 0$ is en $i \neq n+1$; laat dit minimum bereikt worden voor i=r;
6) beschouw als nieuwe basis van de ruimte de oude basisvectoren, afgezien van de r^{de} basisvector, die vervangen wordt door A_k;
7) transformeer X_0 en $\mathcal{B}^{-1}$ volgens (4.15)*), (4.16)*), (4.23) en (4.24);
8) zie punt 1);
enzovoort.

De berekeningen kunnen gemakkelijk uitgevoerd worden met behulp van twee tabellen. In de eerste tabel worden de vectoren A_j en de verschillen $z_j - c_j$ vermeld. In de tweede tabel bevat de eerste kolom de basisvariabelen, de tweede de vector X_0 , de derde t/m de $(m+3)^{de}$ de matrix $\mathcal{B}^{-1}$ en de laatste kolom de vector X_k , wanneer A_k bij de volgende stap in de basis wordt opgenomen.

Voorbeeld 6.1

Evenals in voorbeeld 4.1 (vgl. blz. 39) nemen wij het volgende probleem:
maximaliseer

(6.8) $\qquad y = 2x_1 + 3x_2$

onder de voorwaarden

---

*) In (4.15) en (4.16) leze men k in plaats van j.

$$(6.9)\qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 10 , \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 , \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 . \end{cases}$$

Functie (6.8) wordt als voorwaarde aan (6.9) toegevoegd en de ongelijkheden worden omgezet in vergelijkingen. Het probleem luidt dan:

maximaliseer

$$x_5$$

onder de voorwaarden

$$(6.10)\qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 , \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10 , \\ -2x_1 - 3x_2 + x_5 = 0 , \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0 . \end{cases}$$

Tabel 6.1 bevat de vectoren A_j en de waarde $z_j - c_j$ in de verschillende iteraties; vector A_5 is weggelaten aangezien deze tijdens de berekeningen geen rol speelt.

Tabel 6.1

De vectoren A_j en de $(z_j - c_j)$ - waarden in voorbeeld 6.1

	A_1	A_2	A_3	A_4
	1	3	1	
	2	1		1
	-2	-3		
$z_j - c_j$	-2	-3		
	-1		1	
			$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$

Tabel 6.2

De iteraties in voorbeeld 6.1

	X_b	X_0	$\mathcal{B}^{-1}$	X_2
→	x_3	10	1	3
	x_4	10	1	1
	x_5	0	1	-3

	X_b	X_0	$\mathcal{B}^{-1}$	X_1
	x_2	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
→	x_4	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$ 1	$\frac{5}{3}$
	x_5	10	1 1	-1

X_b	X_0	$\mathcal{B}^{-1}$	
x_2	2	$\frac{2}{5}$ $-\frac{1}{5}$	
x_1	4	$-\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$	
x_5	14	$\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$ 1	

In tabel 6.2 staan de vectoren X_b, X_0, X_k en de matrix $\mathcal{B}^{-1}$; de laatste rij is afgescheiden van het overige deel om de vector $C_b'\mathcal{B}^{-1}$ gemakkelijk te kunnen aflezen. In beide tabellen geven blanco hokjes nullen aan. De $(z_j - c_j)$-hokjes van de in de basis op te nemen vectoren zijn in tabel 6.1 gearceerd. De X_0-kolom in het laatste tableau van tabel 6.2 bevat de optimale oplossing:

$x_2 = 2$, $x_1 = 4$, $x_5 = 14$; het gezochte maximum is dus 14.

Vergelijken wij de tabellen 6.1 en 6.2 met de tabellen 4.4 t/m 4.6, dan blijkt dat in iedere iteratie dezelfde vector in de basis wordt opgenomen en ook dezelfde vector wordt geëlimineerd. Dit is niet verwon-

derlijk, daar de criteria voor opnemen en elimineren dezelfde zijn als bij de in §4 behandelde methode. Afgezien van de laatste kolom is de matrix $\mathcal{B}^{-1}$ uit tabel 6.2 steeds terug te vinden in de kolommen X_3 en X_4 van de tabellen 4.4 t/m 4.6.

Tot nu toe is ondersteld dat er geen μ-variabelen in het probleem voorkwamen. Zijn die er wel, dan wordt e.e.a. iets gecompliceerder. Het ligt voor de hand de in opmerking 4.9 (zie blz. 56) beschreven twee fasen-simplexmethode toe te passen en in beide fasen de objectfunctie te vervangen door een nevenvoorwaarde. Om het rekenproces te stroomlijnen worden de beide voorwaarden reeds in het begin toegevoegd.

Stel dat $y = \sum_{h=1}^{p} c_h x_h$ gemaximaliseerd moet worden onder de voorwaarden

$$(6.11)\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h = a_{i0} & (i=1,\ldots,t)\ , \\ \sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h \leq a_{i0} & (i=t+1,\ldots,m)\ , \\ x_1,\ldots, x_p \geq 0, \end{cases}$$

waarin de $a_{i0} \geq 0$ ondersteld zijn.

Na toevoeging van de μ-variabelen $x_{p+1},\ldots,x_{p+t}$ en de verschilvariabelen $x_{p+t+1},\ldots,x_{p+m}$ ontstaan de voorwaarden

$$(6.12)\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h + x_{p+i} = a_{i0} & (i=1,\ldots,m)\ , \\ x_1,\ldots, x_{p+m} \geq 0\ . \end{cases}$$

Om (6.5) te verkrijgen voegen wij aan $\sum_{h=1}^{p} c_h x_h$ de variabelen $x_{p+1},\ldots, x_n$ toe met coëfficiënt nul; dus $c_{p+1} = c_{p+2} = \ldots = c_n = 0$.

Bij de twee fasen-methode maximaliseert men eerst $-\sum_{j=1}^{t} x_{p+j}$ (vgl. (4.60)) en zodra deze functie nul is $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$. De laatste functie wordt weer in de vorm (6.6) toegevoegd. Behandelt men de eerste functie op dezelfde wijze, dan wordt de corresponderende voorwaarde

$$\sum_{j=1}^{t} x_{p+j} + x_{n+2} = 0 \quad . \tag{6.13}$$

De restricties luiden dan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1p}x_p + x_{p+1} & = a_{10}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \ddots & \\ a_{t1}x_1 + \ldots\ldots + a_{tp}x_p + x_{p+t} & = a_{t0}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \ddots & \\ a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mp}x_p + x_n & = a_{m0}, \end{cases} \tag{6.14}$$

$$-c_1x_1 + \ldots\ldots - c_px_p + x_{n+1} = 0 \quad , \tag{6.15}$$

$$x_{p+1} + \ldots + x_{p+t} + x_{n+2} = 0. \tag{6.16}$$

Hierin zijn x_{n+1} en x_{n+2} vrije variabelen. In de eerste fase maximaliseert men x_{n+2} zonder op x_{n+1} te letten. Het is duidelijk dat $\sum_{j=1}^{t} x_{p+t}$ hierdoor naar nul "gedrukt" wordt; de maximaal mogelijke waarde van x_{n+2} is nul. Is het maximum van x_{n+2} negatief, dan heeft het oorspronkelijke probleem geen oplossing (vgl. de discussie op blz.49). Lukt het wel x_{n+2} nul te maken, dan gaan wij over op de tweede fase, waarin x_{n+1} wordt gemaximaliseerd.

Het enige bezwaar dat aan het stelsel (6.14) t/m (6.16) kleeft, is het ontbreken van een volledige eenheidsmatrix. Hoewel het niet moeilijk

is om desondanks een basisoplossing aan te geven, zullen wij het stelsel toch zodanig transformeren dat er een volledige eenheidsmatrix ontstaat. Daartoe tellen wij de vergelijkingen 1 t/m t (de vergelijkingen met de μ-variabelen) bij elkaar op en trekken de som af van de laatste vergelijking, welke dan overgaat in

$$(6.17) \qquad -\sum_{j=1}^{t} a_{j1} x_1 + \ldots\ldots - \sum_{j=1}^{t} a_{jp} x_j + x_{n+2} = -\sum_{j=1}^{t} a_{j0} .$$

In het stelsel (6.14), (6.15), (6.17) is wel een eenheidsmatrix aanwezig, zodat wij op de gebruikelijke manier kunnen starten. Voor de berekeningen is het iets overzichtelijker eerst vergelijking (6.17) toe te voegen en daarna pas vergelijking (6.15); wij gaan dan uit van het stelsel (6.14), (6.17), (6.15).

Zowel x_{n+1} als x_{n+2} is in de eerste oplossing basisvariabele. Beide laten wij ze gedurende de gehele eerste fase in de basis zitten; de quotiënten $\frac{x_{i0}}{x_{ik}}$ (vgl. punt 5) op blz.89) worden dus alleen bekeken voor dié waarden van i, welke hoogstens gelijk zijn aan m. De vector C_b (nu (m+2)-dimensionaal) is hierdoor steeds gelijk aan (0,...,0,1,0) en $C_b' \mathcal{B}^{-1}$ staat in de voorlaatste rij van $\mathcal{B}^{-1}$.

In de tweede fase blijft men hetzelfde stelsel vergelijkingen hanteren. De variabele x_{n+2} wordt nu echter als een gewone variabele behandeld en moet dus ≥ 0 blijven. Ook doet hij mee bij het zoeken naar de uit de basis te elimineren variabele. Variabele x_{n+1} wordt in de basis gehandhaafd, zodat C_b steeds gelijk is aan (0,...,0,1) en $C_b' \mathcal{B}^{-1}$ wordt gevonden in de laatste rij van $\mathcal{B}^{-1}$. Doordat er geen vergelijkingen weggeschrapt zijn, is ook in de tweede fase steeds voldaan aan voorwaarde (6.13), hetgeen samen met $x_{p+1}, \ldots, x_{p+t}$ en $x_{n+2} \geq 0$ inhoudt dat deze variabelen in iedere iteratie gelijk aan nul zijn. Het is dus niet noodzakelijk de in opmerking 4.9 vermelde speciale procedure toe te passen, wanneer er aan het einde van de eerste fase μ-variabelen met de waarde nul in de basis blijven.

Behoudens kleine wijzigingen zijn de onderdelen van een iteratie in beide fasen identiek aan die, welke vermeld zijn op blz.89. In de eerste fase dient alleen in punt 1) "de laatste rij" vervangen te worden door "de voorlaatste rij" en moet aan punt 5) toegevoegd worden: $i \neq n + 2$.

In de tweede fase behoeft men in het geheel niets te veranderen.

Voorbeeld 6.2

Wij passen de herziene simplexmethode toe op het reeds in voorbeeld 4.4 (zie blz. 61 e.v.) uitgerekende probleem. Na de toevoeging van verschil- en μ-variabelen luidde dit (vgl. (4.65) en (4.67)):
maximaliseer

$$y = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \tag{6.18}$$

onder de voorwaarden

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_8 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 5, \\ x_1, \ldots, x_8 \geq 0, \end{cases} \tag{6.19}$$

waarin x_7 en x_8 μ-variabelen zijn. In de eerste fase werd

$$-x_7 - x_8 \tag{6.20}$$

gemaximaliseerd, in de tweede de functie (6.18). Bij de herziene methode worden uit (6.18) en (6.20) respectievelijk de voorwaarden

$$-3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_9 = 0 \tag{6.21}$$

en

$$x_7 + x_8 + x_{10} = 0 \tag{6.22}$$

afgeleid. In overeenstemming met de transformatie van (6.13) naar (6.17) tellen wij de eerste twee vergelijkingen van (6.19) bij elkaar op en trekken deze som af van (6.22); het resultaat is

(6.23) $$x_1 + x_4 + x_{10} = 0 \ .$$

De nieuwe vergelijkingen worden in de volgorde (6.23), (6.21) aan (6.19) toegevoegd. In de eerste fase maximaliseert men x_{10}, in de tweede x_9. De

Tabel 6.3

De vectoren A_j en de $(z_j - c_j)$ - waarden in voorbeeld 6.2

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_{10}
	- 4	- 1	2	- 1			
	3	1	- 2				
	1	1	1		1		
	1	1				1	
	1			1			1
	- 3	- 2	- 1				
$z_j - c_j$	- 3	- 2	- 1				
		- 1	- 3				
		$-\frac{5}{2}$		$\frac{9}{2}$			$\frac{9}{2}$
				2		$\frac{5}{2}$	2

vectoren A_j staan in tabel 6.3; A_7 en A_8 zijn weggelaten omdat ze, eenmaal uit de basis geëlimineerd, nooit meer opgenomen behoeven te worden. Vector A_9 is eveneens weggelaten aangezien deze bij de berekeningen geen rol speelt, in tegenstelling tot A_{10} die in de tweede fase van belang kan worden.

De opeenvolgende iteraties staan in tabel 6.4. Variabele x_{10} is in het eerste tableau reeds gelijk aan nul, zodat direct op de tweede fase kan worden overgestapt (evenals bij de berekeningen in voorbeeld 4.4).

Tabel 6.4

De iteraties in voorbeeld 6.2

	x_b	x_0	B^{-1}	x_1
	x_7	0	1	- 4
→	x_8	0	1	3
	x_5	10	1	1
	x_6	5	1	1
	x_{10}	0	1	1
	x_9	0	1	- 3

	x_b	x_0	B^{-1}	x_3
	x_7	0	$1 \quad \frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	x_1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
	x_5	10	$-\frac{1}{3} \quad 1$	$\frac{5}{3}$
	x_6	5	$-\frac{1}{3} \quad 1$	$\frac{2}{3}$
→	x_{10}	0	$-\frac{1}{3} \quad 1$	$\frac{2}{3}$
	x_9	0	$1 \quad 1$	- 3

	x_b	x_0	B^{-1}	x_2
	x_7	0	$1 \quad 1 \quad 1$	
	x_1	0	1	
	x_5	10	$\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
→	x_6	5	$1 \quad -1$	1
	x_3	0	$-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	x_9	0	$-\frac{1}{2} \quad \frac{9}{2} \quad 1$	$-\frac{5}{2}$

X_b	X_0	$\mathcal{B}^{-1}$						
x_7	0	1	1			1		
x_1	0					1		
x_5	$\frac{5}{2}$		$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	-1		
x_2	5				1	-1		
x_3	$\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	1		
x_9	$\frac{25}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$	2	1	

De vectoren $C_b'\mathcal{B}^{-1}$ staan in de laatste rij van iedere tabel. Door het niet toepassen van de speciale in opmerking 4.9 beschreven regel wordt in de eerste iteratie niet x_7 geëlimineerd, maar x_8 (vgl. voorbeeld 4.4). In de tweede iteratie verlaat x_{10} de basis. De laatste tabel bevat de ook in voorbeeld 4.4 gevonden oplossing; de maximale waarde van de functie vindt men in het laatste hokje van de X_0-kolom: $x_9 = \frac{25}{2}$.

Vergelijking van de herziene simplexmethode met de simplexmethode.

Wanneer wij de in deze paragraaf besproken methode vergelijken met die in §4, dan moet in de eerste plaats opgemerkt worden, dat men met de herziene methode veel nauwkeuriger kan rekenen. Bij de in §4 beschreven vorm worden in iedere iteratie alle vectoren X_j opnieuw berekend, waardoor deze ten gevolge van afrondingsfouten steeds onnauwkeuriger worden. Vooral bij grote problemen kan deze onnauwkeurigheid een belangrijke invloed op het resultaat hebben. In de herziene methode wordt alleen $\mathcal{B}^{-1}$ getransformeerd, maar blijft men verder vermenigvuldigen met de gegeven vectoren A_j. Is dus een grotere precisie vereist, dan behoeft alleen $\mathcal{B}^{-1}$ in meer decimalen berekend te worden.

De verhoogde nauwkeurigheid speelt vooral een rol, wanneer de uitgangsmatrix $\mathcal{A}$ veel nullen bevat. De matrix van de getransformeerde vectoren X_j wordt gewoonlijk snel opgevuld met getallen ongelijk aan nul, terwijl de herziene methode blijft werken met de veel nullen bevattende oorspronkelijke vectoren A_j. Hierbij dient men te bedenken dat een vermenigvuldi-

ging met nul én snel gaat én geen afrondingsfouten veroorzaakt. Dit is dan ook de rechtvaardiging van opmerking 5.1 (zie blz.75): omdat het in voorbeeld 5.4 besproken probleem een groot aantal coëfficiënten nul in de bijvoorwaarden bevat, verdient oplossing met de herziene simplexmethode de voorkeur.

Een verdere aanvulling op de herziene methode, welke dient om de invloed van afrondingsfouten te verminderen is de zgn. herinversie. Wanneer men een groot aantal iteraties heeft uitgevoerd, kunnen de elementen van $\mathcal{B}^{-1}$ zeer onnauwkeurig geworden zijn. Het is echter bekend uit welke vectoren de basis op een gegeven ogenblik bestaat; stel dat dit de vectoren $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ zijn. Men kan nu de nauwkeurigheid van de verkregen getallen vergroten door op de oorspronkelijke inverse $\mathcal{J}^{-1}$ alleen dié transformaties toe te passen, welke nodig zijn om $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ in de basis op te nemen. Hiervoor zijn hoogstens m stappen nodig; door het kleinere aantal iteraties zal de betrouwbaarheid van de gevonden elementen toenemen. Bovendien kan deze herberekening in een groter aantal decimalen geschieden en kan men beginnen dié vectoren in de basis op te nemen, waarvan de invloed op afrondingsfouten het kleinst is. Dit opnieuw berekenen van de gevonden $\mathcal{B}^{-1}$ noemt men herinversie (Eng.: reinversion).

Naast de in deze paragraaf beschreven vorm van de herziene methode, de zgn. "revised method with full inverse form", bestaan er nog vele andere versies van de herziene methode. Deze hebben alle tot doel de berekeningen te versnellen en/of nauwkeuriger te maken. Wij gaan hier niet verder op in, doch verwijzen naar het reeds op blz. 52 aangehaalde boek van HADLEY.

Deze verdere verfijningen zijn hoofdzakelijk van belang voor het oplossen van grote problemen met behulp van rekenautomaten. Voor berekeningen met potlood en papier of met tafelrekenmachines komen ze vanwege de ingewikkeldere rekenschema's niet in aanmerking. Welke versie van de simplexmethode gebruikt moet worden, hangt af van het soort problemen dat men heeft en de eigenschappen van de beschikbare rekenautomaat. Criteria, die bij de vergelijking een rol spelen zijn o.a. de omvang van het geheugen van de rekenautomaat, het aantal rekenkundige operaties (vermenigvuldigingen, optellingen e.d.) per iteratie, het aantal iteraties en de aantal-

len logische en boekhoudkundige operaties die vereist zijn. Een verdere bespreking kan men o.a. vinden in de artikelen, genoemd in de voetnoot op blz. 55.

7. Dualiteit.

Bij ieder lineair programmeringsprobleem kan een ander lineair programmeringsprobleem geformuleerd worden, dat met het oorspronkelijke probleem nauw verwant is. De verwantschap bestaat uit een aantal wiskundige eigenschappen en kan van belang zijn, zowel voor het uitvoeren van de simplexberekeningen als voor de economische interpretatie van de oplossing.

Ons uitgangspunt is het lineaire programmeringsprobleem, geformuleerd in de volgende vorm:

maximaliseer

$$y = \sum_{h=1}^{p} c_h x_h \tag{7.1}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h \leqq b_i \qquad (i=1,\ldots,m) , \tag{7.2}$$

$$x_h \geqq 0 \qquad (h=1,\ldots,p) . \tag{7.3}$$

In plaats van a_{i0} is hier weer, evenals in § 2, geschreven b_i; verder wordt niet ondersteld dat de $b_i \geqq 0$ zijn; ze kunnen dus ook negatieve waarden aannemen. Dit betekent dat de vorm met een "$\leqq$" teken geen beperking is. Bij een voorwaarde met een "$\geqq$" teken draaien wij de tekens in linker- en rechterlid om. Een voorwaarde in de vorm van een vergelijking, bijv.

$$\sum_{h=1}^{p} a_{1h} x_h = b_1 , \tag{7.4}$$

wordt vervangen door het tweetal voorwaarden

$$\sum_{h=1}^{p} a_{1h} x_h \leqq b_1 \tag{7.5}$$

en

$$(7.6) \qquad \sum_{h=1}^{p} (-a_{1h})\, x_h \leqq -b_1 \ ,$$

dat tezamen genomen gelijkwaardig is aan (7.4).

Ieder lineair programmeringsprobleem kan derhalve in de vorm (7.1) t/m (7.3) geschreven worden.

Voeren wij de vectoren

$$(7.7) \quad D = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_p \end{pmatrix} \ , \ U = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \ , \ A_h = \begin{pmatrix} a_{1h} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mh} \end{pmatrix} \text{ voor } h=1,\ldots,p,$$

en de matrix

$$(7.8) \qquad \mathcal{D} = (A_1,\ldots,A_p)$$

in, dan luidt het probleem (7.1) t/m (7.3):
maximaliseer

$$(7.9) \qquad y = D'U$$

onder de voorwaarden

$$(7.10) \qquad \mathcal{D}U \leqq B \ ,$$

$$(7.11) \qquad U \geqq 0 \ .$$

D,U en $\mathcal{D}$ zijn dié gedeelten van de in § 2 ingevoerde grootheden C, X en $\mathcal{A}$, welke behoren bij de variabelen $x_1,\ldots,x_p$.

Het probleem dat met (7.1) t/m (7.3) nauw verwant is, luidt:

minimaliseer

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i \, t_i \tag{7.12}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ih} \, t_i \geqq c_h \qquad (h=1,\ldots,p) \ , \tag{7.13}$$

$$t_i \geqq 0 \qquad (i=1,\ldots,m) \ , \tag{7.14}$$

of, wanneer wij $t_1,\ldots,t_m$ samenvatten tot de vector V *):

minimaliseer

$$w = B'V \tag{7.15}$$

onder de voorwaarden

$$\mathfrak{D}'V \geqq D \ , \tag{7.16}$$

$$V \geqq 0 \ . \tag{7.17}$$

Wanneer wij de twee problemen vergelijken, dan zien wij dat:
"maximaliseren" is overgegaan in "minimaliseren";
B de rol van D heeft overgenomen en D die van B;
de matrix van de coëfficiënten in de voorwaarden is getransponeerd;
de "$\leqq$" tekens in de bijvoorwaarden vervangen zijn door "$\geqq$" tekens.
Ook de rechterleden van (7.13) behoeven niet $\geqq 0$ te zijn. Verder is het niet moeilijk aan te tonen, dat ieder lineair programmeringsprobleem ook in de vorm (7.12) t/m (7.14) geschreven kan worden.

---

*) De variabelen $t_1, \ldots, t_m$ worden niet samengevat tot de vector T om deze letter te reserveren voor de grotere vector van t-variabelen, die ontstaat, wanneer van de ongelijkheden (7.13) vergelijkingen worden gemaakt; vgl. $X' = (x_1,\ldots,x_n)$ en $U' = (x_1,\ldots,x_p)$.

Men noemt (7.9) t/m (7.11) en (7.15) t/m (7.17) duale problemen; wij zullen (7.9) t/m (7.11) het eerste probleem noemen, aan te geven met I, en (7.15) t/m (7.17) het tweede probleem, aan te geven met II. Probleem II ontstaat uit I door dit laatste te dualiseren.

Bezit een probleem de vorm II, maar zouden wij het willen behandelen als een I-probleem, dan kan dit zonder moeite. Immers (7.15) t/m (7.17) kunnen ook geschreven worden als een maximaliseerprobleem met ongelijkheden waarin "$\leqq$" tekens staan. Het gaat dan over in:
maximaliseer

(7.15') $\qquad -w = (-B)' V$

onder de voorwaarden

(7.16') $\qquad (-\mathfrak{D})' V \leqq -D ,$

(7.17') $\qquad V \geqq 0 .$

Verder kan men gemakkelijk inzien dat dualisering van (7.15') t/m (7.17') probleem I teruggeeft, hetgeen betekent dat dualisering van het gedualiseerde probleem weer leidt tot het oorspronkelijke probleem.

Wij gaan nu over tot het bewijzen van een aantal wiskundige eigenschappen, die het verband leggen tussen de problemen I en II.

Stelling 7.1

Voor iedere vector U^* die aan de voorwaarden van I voldoet en iedere vector V^* die aan de voorwaarden van II voldoet, geldt

(7.18) $\qquad D' U^* \leqq B' V^*$

Bewijs:

Voor iedere vector U^* die aan I voldoet geldt

(7.19) $\qquad \mathfrak{D} U^* \leqq B .$

Voor iedere vector V^* die aan II voldoet, is $V^* \geq 0$; dus is ook aan

(7.20) $\quad (V^*)' \mathfrak{D} U^* \leq (V^*)' B = B' V^*$

voldaan. Evenzo volgt voor die vectoren uit $\mathfrak{D}' V^* \geq D$, dus uit

(7.21) $\quad D' \leq (V^*)' \mathfrak{D}$

en uit

(7.22) $\quad U^* \geq 0$,

dat

(7.23) $\quad D' U^* \leq (V^*)' \mathfrak{D} U^*$.

Combineren wij nu (7.20) en (7.23), dan blijkt voor alle toegelaten vectoren U^* en V^* te gelden

(7.24) $\quad D' U^* \leq (V^*)' \mathfrak{D} U^* \leq B' V^*$,

waaruit het te bewijzene volgt.

Stelling 7.2

Geldt voor een toegelaten vector $\bar{U}$ van probleem I en een toegelaten vector $\bar{V}$ van probleem II

(7.25) $\quad D'\bar{U} = B'\bar{V}$,

dan is $\bar{U}$ een optimale oplossing van het eerste probleem en $\bar{V}$ een optimale oplossing van het tweede probleem. *)

Bewijs:

Voor iedere toegelaten vector U^* is

(7.26) $\quad D' U^* \leq B' \bar{V}$

en dus ook

(7.27) $\quad D' U^* \leq D' \bar{U}$,

---

*) Een willekeurige toegelaten waarde van een vector wordt aangegeven met U^* , V^* , enz.; een optimale toegelaten waarde met $\bar{U}$, $\bar{V}$, enz.

waaruit het gestelde volgt voor $\bar{U}$. Voor $\bar{V}$ wordt de eigenschap op analoge wijze aangetoond.

In verband met de volgende stelling brengen wij in herinnering dat in §3 en §4 werd uitgegaan van een lineair programmeringsprobleem, waarin de bijvoorwaarden vergelijkingen waren. Probleem I moet dus aangevuld worden met verschilvariabelen x_{p+i} (i=1,...,m) om het deze vorm te geven (vgl. blz. 34-35). Bij de uitwerking van de simplexmethode was in iedere iteratie X_b dàt deel van X, dat de basisvariabelen bevatte, gaf X_0 aan welke waarden de basisvariabelen bezaten, was $\mathfrak{B}^{-1}$ de inverse van de matrix van basisvectoren en was C_b dàt deel van C dat met X_b correspondeerde. Het met verschilvariabelen aangevulde probleem I blijven wij probleem I noemen.

Stelling 7.3

Is $\bar{X}_b = \bar{X}_0$ een optimale oplossing van probleem I en zijn $\bar{\mathfrak{B}}$ resp. $\bar{C}_b$ de bijbehorende matrix van basisvectoren en het bijbehorende deel van C, dan is $\bar{C}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1}$ een optimale oplossing van probleem II.

Bewijs:

Wij tonen eerst aan dat $\bar{C}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1}$ een toegelaten oplossing is van het tweede probleem.

Aangezien $\bar{X}_0$ een optimale oplossing is, geldt voor de bijbehorende $z_j - c_j$

$$\bar{z}_j - c_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n) , \tag{7.28}$$

of (vgl. (6.3))

$$\bar{C}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1} A_j - c_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n) . \tag{7.29}$$

Nemen wij de ongelijkheden (7.29) samen voor j = 1,...,p, dan blijkt te gelden

$$\bar{C}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1} \mathfrak{D} - D' \geq 0 , \tag{7.30}$$

of

(7.31) $\mathfrak{D}' (\bar{\mathfrak{B}}^{-1})' \bar{c}_b \geqq D$,

zodat $(\bar{\mathfrak{B}}^{-1})' \bar{c}_b$ voldoet aan (7.16). Voor $j = p + i$ met $i = 1,\ldots,m$ (dus de indices van de toegevoegde eenheidsvectoren E_i), volgt uit (7.29)

(7.32) $\bar{c}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1} A_{p+i} - c_{p+i} = \bar{c}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1} E_i \geqq 0$,

of, als wij deze getallen samenvoegen tot een vector,

(7.33) $\bar{c}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1} \geqq 0$.

Er is dus ook aan (7.17) voldaan.

Bovendien volgt uit stelling 7.2 en uit

(7.34) $B' (\bar{\mathfrak{B}}^{-1})' \bar{c}_b = \bar{c}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1} B = \bar{c}_b' \bar{x}_0$,

dat $\bar{c}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1}$ een optimale oplossing is van het tweede probleem.

Uit deze stelling blijkt dat uit een optimale oplossing van probleem I direct een optimale oplossing van probleem II kan worden berekend. Het omgekeerde is ook juist, omdat een probleem II, zoals wij gezien hebben, ook als een probleem I is te schrijven; uit een optimale oplossing van een probleem II kan men dus ook een optimale oplossing van een probleem I afleiden.

Bij de in §4 behandelde versie van de simplexmethode is de optimale oplossing van het duale probleem af te lezen uit de eindtabel van het eerste probleem. Uit (7.32) en (7.33) volgt dat de $(z_j - c_j)$- waarden van de verschilvariabelen, tezamen genomen, gelijk zijn aan $\bar{c}_b' \bar{\mathfrak{B}}^{-1}$. De optimale oplossing van het duale probleem staat dus in de $(z_j - c_j)$- rij in de kolommen van de eenheidsvectoren. Bij het trekken van deze conclusie is gebruik gemaakt van $c_{p+i} = 0$ en van het feit dat de verschilvariabelen aan de voorwaarden zijn toegevoegd met een "+" teken.

Ook de $(z_j - c_j)$- waarden in de andere kolommen kunnen worden geinterpreteerd. Daartoe voegen wij aan de ongelijkheden (7.13) de verschil-

variabelen $t_{m+1},\ldots,t_{m+p}$ met een minteken toe om er vergelijkingen van te maken. Dit leidt tot

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ih}\, t_i - t_{m+h} = c_h \qquad (h=1,\ldots,p)\ , \tag{7.35}$$

of

$$\mathfrak{D}'\, V - \mathfrak{I} \begin{pmatrix} t_{m+1} \\ \vdots \\ t_{m+p} \end{pmatrix} = D\ . \tag{7.36}$$

De $(z_j - c_j)$ - waarden in de kolommen 1 t/m p in de optimale oplossing van het eerste probleem zijn (zie (7.30)) gelijk aan

$$\bar{c}_b'\, \bar{\mathfrak{B}}^{-1}\, \mathfrak{D} - D'\ , \tag{7.37}$$

of

$$\mathfrak{D}'(\bar{\mathfrak{B}}^{-1})'\, \bar{c}_b - D. \tag{7.38}$$

Vergelijken wij dit met (7.36), dan blijken de bedoelde $(z_j - c_j)$-waarden gelijk te zijn aan de waarden van de verschilvariabelen $t_{m+1},\ldots,t_{m+p}$ in de optimale oplossing van het duale probleem.

De $(z_j - c_j)$ - rij van een optimale oplossing van het eerste probleem geeft dus de waarden van alle t-variabelen in een optimale oplossing van het tweede probleem.

Voorbeeld 7.1

In voorbeeld 4.1 (zie blz.39 e.v.) werd het probleem:

maximaliseer

$$y = 2x_1 + 3x_2 \tag{7.39}$$

onder de voorwaarden

(7.40) $x_1 + 3x_2 \leq 10$,

(7.41) $2x_1 + x_2 \leq 10$,

(7.42) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

opgelost met de standaardsimplexmethode. De hieronder vermelde tabel 7.1 (vgl. tabel 4.6) was de laatste tabel van het rekenschema.

Tabel 7.1

Eindtabel van de simplexberekeningen in voorbeeld 4.1

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
3	x_2	2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
2	x_1	4	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
$z_j - c_j$		14	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$

Het duale probleem van (7.39) t/m (7.42) luidt:

minimaliseer

(7.43) $w = 10t_1 + 10t_2$

onder de voorwaarden

(7.44) $t_1 + 2t_2 \geq 2$,

(7.45) $3t_1 + t_2 \geq 3$,

(7.46) $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$.

Na toevoeging van de verschilvariabelen t_3 en t_4 gaan (7.44) en (7.45)

over in

(7.47) $\quad t_1 + 2t_2 - t_3 = 2$,

en

(7.48) $\quad 3t_1 + t_2 - t_4 = 3$.

Passen wij nu de uit stelling 7.3 getrokken conclusies toe op tabel 7.1, dan blijkt de optimale oplossing van het duale probleem te zijn: $t_1 = \frac{4}{5}$, $t_2 = \frac{3}{5}$; de verschilvariabelen t_3 en t_4 zijn beide gelijk aan nul. Men kan eenvoudig nagaan dat deze oplossing aan (7.47) en (7.48) voldoet en de functie (7.43) minimaliseert.

Opmerking 7.1

Ook bij de herziene simplexmethode kan de optimale oplossing van het duale probleem uit de tabellen van het eerste probleem worden afgelezen. Men kan namelijk aantonen dat de $(z_j - c_j)$ - waarden in het getransformeerde probleem dezelfde zijn als die in het nog niet getransformeerde probleem (vgl. de laatste rij in tabel 6.1 met de laatste rij in tabel 7.1). Het aflezen van de optimale oplossing van het duale probleem kan derhalve op dezelfde wijze gebeuren als bij de standaardsimplexmethode.

Lost men een probleem van het type (7.15) t/m (7.17) op, dan geldt ook hier dat de bij de optimale oplossing behorende vector $\bar{c}'_b \bar{B}^{-1}$ een optimale oplossing is van het duale probleem. Dit wordt duidelijk wanneer men (7.15) t/m (7.17) schrijft in de vorm (7.15') t/m (7.17') en hierop dan stelling 7.3 toepast. Het duale probleem van (7.15') t/m (7.17') is hetzelfde als dat van (7.15) t/m (7.17). Verder is een optimale oplossing van het ene probleem ook een optimale oplossing van het andere; de corresponderende vectoren $\bar{c}_b'$ en de corresponderende matrices $\bar{B}^{-1}$ zijn tegengesteld van teken; de produkten $\bar{c}_b' \bar{B}^{-1}$ en $(-\bar{c}_b)' (-\bar{B})^{-1}$ zijn echter identiek, waaruit volgt dat $\bar{c}_b' \bar{B}^{-1}$ een optimale oplossing is van het duale probleem van (7.15) t/m (7.17).

Wel moet men oppassen bij het aflezen van deze oplossing uit de

$(z_j - c_j)$ - rij. De verschilvariabelen zijn aan (7.13) toegevoegd met een minteken, hetgeen impliceert dat aan de reeds aanwezige vectoren niet de p eenheidsvectoren $E_1,\ldots,E_p$ worden toegevoegd, maar $-E_1,\ldots,-E_p$. De bij deze vectoren behorende negatieve waarden van $z_j - c_j$ vormen dus niet de optimale oplossing van (7.1) t/m (7.3), maar de tegengestelden daarvan.

Hetzelfde geldt voor de $(z_j - c_j)$ - waarden, die behoren bij de andere vectoren; deze zijn gelijk aan de tegengestelden van de waarden van de verschilvariabelen in de optimale oplossing van het duale probleem. Men kan dit nagaan door de hierboven voor $\bar{C}_b' \bar{B}^{-1}$ gebruikte redenering toe te passen op (7.38). Ga e.e.a. na voor het in voorbeeld 7.1 besproken probleem.

Opmerking 7.2

Uit het voorgaande volgt dat de optimale oplossing van een gegeven lineair programmeringsprobleem zowel eenvoudig kan worden afgelezen uit de eindtabel van de iteraties van het probleem zelf als uit de eindtabel van de iteraties van het duale probleem. Daar de vereiste rekentijd voor een groot deel bepaald wordt door het aantal restricties, ligt het voor de hand dàt probleem op te lossen waarvoor dit aantal minimaal is.

Bij het aflezen van de oplossing van het duale probleem kunnen zich kleine complicaties voordoen wanneer de vector B in (7.10) of de vector D in (7.16) negatieve elementen bevat. De in §4 en §6 behandelde methoden zijn dan niet rechtstreeks toepasbaar. Luidt een voorwaarde bijvoorbeeld

$$(7.49) \qquad \sum_{h=1}^{p} a_{sh} x_h \leq b_s$$

en is $b_s < 0$, dan schrijven wij, om de berekeningen te kunnen starten, deze voorwaarde eerst als

$$(7.50) \qquad \sum_{h=1}^{p} (-a_{sh}) x_h \geq - b_s$$

en voegen vervolgens een verschilvariabele toe met een minteken. De optimale oplossing van het duale probleem is echter de vector $\bar{C}'_b \bar{\mathcal{B}}^{-1}$, welke behoort bij het oorspronkelijke probleem. Noemen wij de overeenkomstige vector van het herschreven probleem $(\bar{C}'_b \bar{\mathcal{B}}^{-1})_H$, dan moet nagegaan worden of de gezochte vector $\bar{C}_b' \bar{\mathcal{B}}^{-1}$ hieruit kan worden afgeleid.

Hiertoe merken wij op dat het omdraaien van de tekens in de s^{de} rij van $\mathcal{D}$ alleen ten gevolge heeft, dat de tekens in de s^{de} kolom van $\bar{\mathcal{B}}^{-1}$ en $(\bar{\mathcal{B}}^{-1})_H$ tegengesteld zijn. De vectoren $\bar{C}_b' \bar{\mathcal{B}}^{-1}$ en $(\bar{C}_b' \bar{\mathcal{B}}^{-1})_H$ zijn derhalve identiek, afgezien van het teken van het s^{de} element. Moet men dus in één of meer voorwaarden de tekens omdraaien om niet-negatieve rechterleden te verkrijgen, dan dienen de tekens van de elementen in $(\bar{C}_b' \bar{\mathcal{B}}^{-1})_H$ met dezelfde nummers als de bedoelde voorwaarden te worden omgedraaid om de optimale oplossing van het duale probleem te vinden. Bij het aflezen uit de $(z_j - c_j)$-rij in het simplextableau hoeft men geen tekens om te draaien. De verschilvariabele wordt namelijk met een minteken toegevoegd, waardoor de bijbehorende $(z_j - c_j)$-waarde gelijk is aan het tegengestelde van het corresponderende element uit de vector $(C_b' \bar{\mathcal{B}}^{-1})_H$ (vgl. ook voorbeeld 7.2).

Bevatten de voorwaarden van bijvoorbeeld probleem I de vergelijking (7.4), dan wordt deze vervangen door de twee ongelijkheden (7.5) en (7.6). Dit heeft ten gevolge dat aan $\mathcal{D}$ een rij met de coëfficiënten $-a_{1h}$ wordt toegevoegd en aan B het element $-b_1$. Het duale probleem bevat daardoor twee variabelen (stel t_{11} en t_{12}), die in de objectfunctie respectievelijk de coëfficiënten b_1 en $-b_1$ hebben en in de voorwaarden de coëfficiënten a_{1h} en $-a_{1h}$. Wij vergelijken dit resultaat met formule (4.54) op blz. 50 en zien dan dat de variabelen t_{11} en t_{12} vervangen kunnen worden door de vrije variabele

$$t_1 = t_{11} - t_{12} \cdot \tag{7.51}$$

Een vergelijking in hetzij probleem I, hetzij probleem II correspondeert met een vrije variabele in het duale probleem. De vorm van een voorwaarde beïnvloedt derhalve niet de voorwaarden in het duale probleem, maar de aard van een variabele.

Het omgekeerde is ook waar. Bevindt zich in probleem I een vrije variabele x_l, dan wordt deze in overeenstemming met (4.54) vervangen door

$$x_l = x_{l1} - x_{l2} \quad (7.52)$$

waarin x_{l1} en x_{l2} beide ≥ 0 moeten zijn. In $\mathfrak{D}$ en D worden naast A_l en c_l ook $-A_l$ en $-c_l$ opgenomen. Het duale probleem bevat hierdoor naast de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{m} a_{il}\, t_i \geq c_l \quad (7.53)$$

ook de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{m} (-a_{il})\, t_i \geq -c_l \quad (7.54)$$

of

$$\sum_{i=1}^{m} a_{il}\, t_i \leq c_l \quad (7.55)$$

Tezamen genomen vormen (7.53) en (7.55) de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{m} a_{il}\, t_i = c_l \quad (7.56)$$

waaruit blijkt dat een vrije variabele in probleem I correspondeert met een voorwaarde in de vorm van een vergelijking in probleem II. Dezelfde eigenschap blijft gelden als wij de problemen I en II verwisselen.

Als speciaal geval vinden wij dat de volgende problemen elkaars duale zijn:

maximaliseer

$$y = D'U \quad (7.57)$$

onder de voorwaarden

(7.58) $\mathfrak{D}\,U = B$,

(7.59) $U \geqq 0$.

en

minimaliseer

(7.60) $w = B'V$

onder de voorwaarden

(7.61) $\mathfrak{D}'V \geqq D$,

(7.62) V vrij.

Men noemt dit wèl de niet-symmetrische vorm van de dualiteit en dan in overeenstemming daarmee (7.9) t/m (7.11) en (7.15) t/m (7.17) de symmetrische vorm van de dualiteit.

Voorbeeld 7.2

Het in voorbeeld 4.3 (zie blz. 57 e.v.) doorgerekende probleem krijgt de vorm (7.9) t/m (7.11) wanneer wij het als volgt opschrijven:

maximaliseer

(7.63) $y = 2x_1 + x_2 + 3x_{31} - 3x_{32}$

onder de voorwaarden

(7.64) $x_1 + 2x_2 + 3x_{31} - 3x_{32} \leqq 18$,

$$(7.65) \qquad -3x_1 - 4x_2 - 2x_{31} + 2x_{32} \leq -30$$

$$(7.66) \qquad x_1 + x_2 + x_{31} - x_{32} \leq 10$$

$$(7.67) \qquad -x_1 - x_2 - x_{31} + x_{32} \leq -10$$

$$(7.68) \qquad x_1 , \; x_2 , \; x_{31} \text{ en } x_{32} \geq 0 ,$$

waarin $x_3 = x_{31} - x_{32}$.

Lossen wij dit probleem met de standaardsimplexmethode op, dan draaien wij eerst de tekens in (7.65) en (7.67) om en voegen vervolgens de verschilvariabelen $x_4,\ldots, x_7$ en de artificiële variabelen x_8 en x_9 toe. De voorwaarden luiden dan

$$(7.69) \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_{31} - 3x_{32} + x_4 = 18 ,$$

$$(7.70) \qquad 3x_1 + 4x_2 + 2x_{31} - 2x_{32} - x_5 + x_8 = 30 ,$$

$$(7.71) \qquad x_1 + x_2 + x_{31} - x_{32} + x_6 = 10 ,$$

$$(7.72) \qquad x_1 + x_2 + x_{31} - x_{32} - x_7 + x_9 = 10 ,$$

$$(7.73) \qquad x_1,\ldots, x_9 \geq 0 .$$

Tabel 7.2 bevat het laatste tableau van de simplexberekeningen; de bij de artificiële variabelen behorende vectoren zijn weggelaten.

Tabel 7.2

Eindtableau van de simplexberekeningen in voorbeeld 7.2

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_{31}	X_{32}	X_4	X_5	X_6	X_7
3	x_{31}	$\frac{8}{3}$	0	0	1	- 1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
1	x_2	$\frac{8}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$	0
0	x_7	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	x_1	$\frac{14}{3}$	1	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0
$z_j - c_j$		20	0	0	0	0	0	1	5	0

Het duale probleem van (7.63) t/m (7.68) luidt:
minimaliseer

(7.74) $$w = 18\ t_1 - 30\ t_2 + 10\ t_{31} - 10\ t_{32}$$

onder de voorwaarden

(7.75) $$t_1 - 3t_2 + t_{31} - t_{32} \geq 2\ ,$$

(7.76) $$2t_1 - 4t_2 + t_{31} - t_{32} \geq 1\ ,$$

(7.77) $$3t_1 - 2t_2 + t_{31} - t_{32} \geq 3\ ,$$

(7.78) $$-3t_1 + 2t_2 - t_{31} + t_{32} \geq -3,$$

(7.79) $$t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_{31} \text{ en } t_{32} \geq 0.$$

Een optimale oplossing is af te lezen uit de laatste regel van tabel 7.2; de $(z_j - c_j)$ - waarden van de aan (7.65) t/m (7.68) toegevoegde verschilvariabelen zijn resp. 0, 1, 5 en 0, zodat een optimaal stel waarden van t_1, t_2, t_{31} en t_{32} is: $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_{31} = 5$ en $t_{32} = 0$. Men kan gemakkelijk nagaan dat de bij de optimale oplossing van het eerste probleem behorende vector $\bar{c}_b' \bar{B}^{-1}$ gelijk is aan (0, -1, 5, 0). Voegt men aan de voorwaarden (7.75) t/m (7.78) verschilvariabelen toe, dan blijken deze in de optimale oplossing alle de waarde nul te hebben (vgl. de $(z_j - c_j)$ - waarden van de variabelen x_1, x_2, x_{31} en x_{32} in tabel 7.2).

In gecomprimeerde vorm luidt het duale probleem:

minimaliseer

$$w = 18t_1 - 30t_2 + 10t_3 \tag{7.80}$$

onder de voorwaarden

$$t_1 - 3t_2 + t_3 \geqq 2 , \tag{7.81}$$

$$2t_1 - 4t_2 + t_3 \geqq 1 , \tag{7.82}$$

$$3t_1 - 2t_2 + t_3 = 3 , \tag{7.83}$$

$$t_1, t_2 \geqq 0 , \; t_3 \text{ vrij} , \tag{7.84}$$

welke vorm natuurlijk ook rechtstreeks uit (4.61) en (4.62) afgeleid had kunnen worden.

Opmerking 7.3

Uit stelling 7.3 volgt nog de volgende belangrijke eigenschap: bezit één van beide duale problemen een eindige oplossing, dan heeft ook het andere een eindige oplossing en is het maximum van het eerste probleem gelijk aan het minimum van het tweede probleem.

Aan de hand van voorbeelden kan men laten zien dat, wanneer het

eerste probleem geen toegelaten oplossing heeft, het tweede hetzij evenmin een toegelaten oplossing heeft, hetzij een oplossing met een oneindige waarde van de te optimaliseren functie.

De laatste eigenschap die wij behandelen met betrekking tot het wiskundige verband tussen de problemen I en II is vastgelegd in stelling 7.4. Hierbij onderstellen wij dat probleem I is aangevuld met de verschilvariabelen $x_{p+1},\ldots, x_{p+m}$ en probleem II met de verschilvariabelen $t_{m+1},\ldots, t_{m+p}$; de vectoren van de p + m = n variabelen worden aangegeven met X resp. T.

Stelling 7.4

Is $X = \bar{X}$ een optimale oplossing van probleem I en $T = \bar{T}$ een optimale oplossing van probleem II, dan geldt

(7.85) $\qquad \bar{x}_h \, \bar{t}_{m+h} = 0 \qquad (h = 1,\ldots,p)$,

(7.86) $\qquad \bar{t}_i \, \bar{x}_{p+i} = 0 \qquad (i = 1,\ldots,m)$.

Bewijs:

Wij hebben gezien dat $\bar{t}_1,\ldots, \bar{t}_m$ gelijk zijn aan de $(z_j - c_j)$ - waarden van de verschilvariabelen in de optimale oplossing van het eerste probleem. Combineren wij dit met de in opmerking 4.4 (zie blz. 42) genoemde eigenschap dat de $(z_j - c_j)$ - waarde van een basisvariabele altijd nul is, dan volgt direct: $\bar{x}_{p+i} > 0 \rightarrow x_{p+i}$ basisvariabele $\rightarrow \bar{z}_{p+i} - c_{p+i} = 0 \rightarrow \bar{t}_i = 0$, dus $\bar{t}_i \, \bar{x}_{p+i} = 0$. De betrekkingen (7.85) worden met dezelfde redenering bewezen, maar dan uitgaande van probleem II.

In woorden houdt stelling 7.4 het volgende in: is de optimale waarde van de h^{de} variabele in probleem I positief, dan is de optimale waarde van de h^{de} verschilvariabele in probleem II nul en omgekeerd; is de optimale waarde van de i^{de} variabele in probleem II positief, dan is de i^{de} verschilvariabele in probleem I nul en omgekeerd. In het Engels noemt men deze eigenschap wel "complementary slackness".

Tenslotte merken wij op dat de betrekkingen (7.85) en (7.86) gelijkwaardig zijn aan

$$(7.87) \qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ih}\,\bar{t}_i - c_h)\,\bar{x}_h = 0 \qquad (h=1,\ldots,p)\ ,$$

resp.

$$(7.88) \qquad \sum_{h=1}^{p} (a_{ih}\,\bar{x}_h - b_i)\,\bar{t}_i = 0 \qquad (i=1,\ldots,m)$$

en, tezamen genomen, ook aan

$$(7.89) \qquad (\bar{V}'\,\mathfrak{D} - D')\,\bar{U} + (B' - \bar{U}'\,\mathfrak{D}')\,\bar{V} = 0\ .$$

Opmerking 7.4

Ook het omgekeerde van stelling 7.4 kan bewezen worden. Oplossingen $X = \bar{X}$ van probleem I en $T = \bar{T}$ van probleem II, die voldoen aan (7.85) en (7.86) zijn optimaal.

De duale simplexmethode

In het voorgaande hebben wij gezien dat de $(z_j - c_j)$ - waarden in de optimale oplossing van probleem I een optimale oplossing van probleem II vormen en de tegengestelden van de $(z_j - c_j)$ - waarden in de optimale oplossing van probleem II een optimale oplossing van probleem I. De $(z_j - c_j)$ - waarden in niet-optimale tableau's van probleem I kunnen geen toegelaten oplossing van probleem II voorstellen, daar sommige van deze waarden negatief zijn. Wel voldoen ze in iedere stap aan de vergelijkingen (7.36), wanneer men, in analogie met hetgeen bij de optimale oplossing is gedaan, aan de variabelen $t_1,\ldots, t_m$ waarden toekent die gelijk zijn aan de $(z_j - c_j)$'s van de verschilvariabelen $x_{p+1},\ldots, x_{p+m}$, en aan $t_{m+1},\ldots t_{m+p}$ waarden, die gelijk zijn aan de $(z_j - c_j)$'s van de variabelen $x_1,\ldots, x_p$. Men vindt dan dat de eerste groep variabelen gelijk is aan

(7.90) $$V' = (t_1, \ldots, t_m) = C_b' \mathcal{B}^{-1}$$

en de tweede groep aan

(7.91) $$(t_{m+1}, \ldots, t_{m+p}) = C_b' \mathcal{B}^{-1} \mathcal{D} - D'$$

(vgl. (7.33) resp. (7.30)). Substitutie van deze waarden in het linkerlid van (7.36) leidt tot

(7.92)
$$\mathcal{D}'V - \mathcal{I} \begin{pmatrix} t_{m+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{m+p} \end{pmatrix} = \mathcal{D}'(C_b' \mathcal{B}^{-1})' - \mathcal{I}\,(C_b' \mathcal{B}^{-1}\mathcal{D} - D')' =$$

$$= (C_b' \mathcal{B}^{-1}\mathcal{D})' - (C_b' \mathcal{B}^{-1} \mathcal{D})' + D = D ,$$

wat gelijk is aan het rechterlid van (7.36). De oplossing (7.90), (7.91) voldoet dus wel aan (7.36), maar niet aan $t_j \geqq 0$ voor $j = 1, \ldots, m + p$.

Verder kan men bewijzen dat de waarden van de basisvariabelen in het eerste probleem gelijk zijn aan de tegengestelden van de $(z_j - c_j)$ - waarden van de niet-basisvariabelen in het tweede probleem (vgl. ook blz.110). Alle $(z_j - c_j)$'s, behorende bij de oplossing (7.90), (7.91) van het tweede probleem zijn derhalve $\leqq 0$ en deze oplossing zou dus optimaal zijn (een minimaliseringsprobleem !), als alle variabelen waarden $\geqq 0$ hadden.
Samengevat:
met een toegelaten niet-optimale oplossing van het eerste probleem correspondeert een niet-toegelaten oplossing van het tweede probleem, waarvoor alle $(z_j - c_j)$ - waarden $\leqq 0$ zijn.

Bij een nieuwe iteratie in probleem I nemen wij in de basis de vector met de kleinste $(z_j - c_j)$ - waarde op en transformeren daarna zodanig dat de oplossing toegelaten blijft; in de nieuwe oplossing is de betreffende $(z_j - c_j)$ - waarde nul geworden. Gaan wij nu na wat deze iteratie voor probleem II betekent, dan zien wij dat de variabele met de meest negatieve waarde nul geworden is, terwijl wij nog steeds beschikken over een oplossing waarin alle $(z_j - c_j) \leqq 0$ zijn.

Dit suggereert dat het mogelijk moet zijn het iteratieproces dat ontstaat bij toepassing van de simplexmethode op probleem I te vertalen in een iteratieproces voor probleem II. Beginnen wij bij I met een toegelaten niet-optimale oplossing, dan wordt in probleem II gestart met een niet-toegelaten oplossing met de eigenschap dat alle $(z_j - c_j)$'s het voor een optimale oplossing vereiste teken hebben. In probleem I trachten wij alle $(z_j - c_j) \geq 0$ te maken en gaan wij daartoe van de ene toegelaten oplossing over op de andere. Voor probleem II houdt dit in, dat gestreefd wordt naar een oplossing die steeds "meer toegelaten" is, bij welk proces wij ervoor zorgen dat de $(z_j - c_j)$'s steeds het voor een optimale oplossing vereiste teken bezitten.

De iteratiemethode die voor het duale probleem ontstaat, wanneer men de simplexmethode, toegepast op het eerste probleem, stap voor stap vertaalt, draagt de naam duale simplexmethode. Deze methode begint dus met een niet-toegelaten oplossing en onderscheidt zich verder alleen van de gewone simplexmethode in de wijze waarop de uit de basis te elimineren vector en de erin op te nemen vector worden gekozen. Is dit gebeurd en zijn dus een rij en een kolom in het simplextableau aangegeven, dan is het verdere verloop van een iteratie identiek aan dat bij de reeds besproken simplexmethode.

Voor de uitwerking van de duale simplexmethode gaan wij uit van het lineaire programmeringsprobleem, zoals dat in de formules (3.1) t/m (3.3) gegeven is (zie blz. 17). Wij nemen aan dat beschikt wordt over een basisoplossing, waarvoor alle $(z_j - c_j)$ - waarden ≥ 0 zijn en waarin de X_0 kolom één of meer negatieve elementen bevat. De na de vertaling ontstane iteratiemethode verloopt dan als volgt.

Men bepaalt de uit de basis te elimineren vector door het kleinste (negatieve) element in de X_0- kolom op te zoeken; laat dit x_{r0} zijn. Om vast te stellen welke vector in de basis moet worden opgenomen, zoeken wij eerst de negatieve elementen in de rij van x_{r0} op. Zijn die er niet, dan bezit het probleem geen toegelaten oplossing. In het andere geval bepalen wij

(7.93) $$\max_j \frac{z_j - c_j}{x_{rj}} \quad (x_{rj} < 0);$$

laat dit bereikt worden voor j = k. De in de basis op te nemen vector is dan A_k en de eruit te elimineren vector A_r; voor de vereiste transformaties verwijzen wij naar §4, en wel de punten 6) en 7) op blz.43. Zodra alle elementen in de X_0-kolom ≥ 0 zijn is de optimale oplossing bereikt.

Past men de duale methode toe op een minimaliseringsprobleem, dan zijn de $(z_j - c_j)$'s steeds ≤ 0 en wordt (7.93) vervangen door

(7.94) $$\min_j \frac{z_j - c_j}{x_{rj}} \quad (x_{rj} < 0).$$

De belangrijkste toepassingen van de duale simplexmethode vindt men in diè gevallen, waarin men reeds beschikt over een basisoplossing waarvoor alle $(z_j - c_j) \geq 0$ zijn. Deze doen zich o.a. voor bij bepaalde oplossingsmethoden voor discrete programmeringsproblemen (vgl.§ 15, deel 6B) en bij problemen, die vergelijkbaar zijn met het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 7.3

Voorbeeld 5.1 (zie blz. 64 e.v.) illustreerde het oplossen van een eenvoudig mengprobleem. Er stond een viertal grondstoffen ter beschikking en gevraagd werd hieruit op zo goedkoop mogelijke wijze een legering samen te stellen, die minstens 18% tin bevatte. De optimale oplossing werd gevonden in tabel 5.1, waarvan het laatste tableau in tabel 7.3 wordt herhaald.

De goedkoopste legering die aan de voorwaarden voldoet, bestaat uit $\frac{9}{13}$ ton B en $\frac{4}{13}$ ton D, kost $35\frac{3}{13}$ per ton en bevat 18% tin.

Stel nu dat men achteraf als nieuwe eis aan de legering oplegt, dat deze voor hoogstens 50% uit grondstof B mag bestaan. Dit betekent dat ook

Tabel 7.3

De optimale oplossing van voorbeeld 5.1

c_b	x_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-30	x_2	$\frac{9}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$\frac{21}{26}$	0	$\frac{1}{26}$
-47	x_4	$\frac{4}{13}$	$\frac{20}{13}$	0	$\frac{5}{26}$	1	$-\frac{1}{26}$
$z_j - c_j$		$-35\frac{3}{13}$	$\frac{50}{13}$	0	$\frac{45}{26}$	0	$\frac{17}{26}$

aan de voorwaarde

$$x_2 \leq \frac{1}{2} \tag{7.95}$$

moet zijn voldaan; de gevonden oplossing is niet meer toegelaten.

Uiteraard kan het nieuwe probleem van voren af aan met de simplexmethode opgelost worden. Vaak is het echter sneller om uit te gaan van de reeds gevonden oplossing en dan de duale simplexmethode toe te passen. Daartoe vullen wij (7.95) aan met de verschilvariabele x_8 en krijgen dan

$$x_2 + x_8 = \frac{1}{2} . \tag{7.96}$$

Zouden wij deze vergelijking rechtstreeks opnemen in tabel 7.3 met $\frac{1}{2}$ in kolom X_0, 1 in kolom X_2 en 1 in kolom X_8, dan zou blijken dat X_2 geen eenheidsvector meer was. Aangezien x_2 basisvariabele blijft en X_2 dus na de toevoeging weer een eenheidsvector moet zijn, dient x_2 eerst uit (7.96) te worden geëlimineerd. Dit kan met behulp van de x_2-rij uit tabel 7.3, waaruit wij de volgende vergelijking aflezen

$$\frac{9}{13} = -\frac{7}{13} x_1 + x_2 + \frac{21}{26} x_3 + \frac{1}{26} x_5 \tag{7.97}$$

(vgl. het verband tussen (4.29) en tabel 4.1). Eliminatie van x_2 transformeert (7.96) in

(7.98) $$-\frac{5}{26} = \frac{7}{13}x_1 - \frac{21}{26}x_3 - \frac{1}{26}x_5 + x_8 .$$

Voegen wij deze vergelijking toe aan tabel 7.3 door alle coëfficiënten in de desbetreffende kolommen te plaatsen, in de X_b-kolom x_8 op te schrijven en een kolom X_8 op te nemen, dan vinden wij tabel 7.4. De $(z_j - c_j)$- rij ondergaat geen wijziging aangezien de coëfficiënt van x_8 in de kostenfunctie

Tabel 7.4

Een niet-toegelaten oplossing van het uitgebreide voorbeeld 5.1

	c_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_8
	-30	x_2	$\frac{9}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$\frac{21}{26}$	0	$\frac{1}{26}$	0
	-47	x_4	$\frac{4}{13}$	$\frac{20}{13}$	0	$\frac{5}{26}$	1	$-\frac{1}{26}$	0
→	0	x_8	$-\frac{5}{26}$	$\frac{7}{13}$	0	$-\frac{21}{26}$	0	$-\frac{1}{26}$	1
	$z_j - c_j$		$-35\frac{3}{13}$	$\frac{50}{13}$	0	$\frac{45}{26}$	0	$\frac{17}{26}$	0
						↑			

0 is. De tabel bevat dus alleen $(z_j - c_j)$-waarden ≥ 0 en voldoet derhalve aan de voorwaarde, die aan de beginoplossing bij de duale simplexmethode gesteld werd. Wij wisten reeds dat de oplossing niet alle voorwaarden vervulde, zodat het ons niet verbaast in de X_0-kolom een negatief element te zien, namelijk $x_8 = -\frac{5}{26}$.

Bij toepassing van de duale simplexmethode wordt x_8 uit de basis geëlimineerd. De op te nemen variabele wordt met (7.93) bepaald, omdat het voorbeeld opgeschreven is als een maximaliseringsprobleem. De negatieve elementen in de x_8-rij staan in de X_3- en de X_5-kolom. De te vergelijken quotiënten zijn dus $\frac{45/26}{-21/26}$ en $\frac{17/26}{-1/26}$, waarvan het eerste het grootste is, zodat x_3 basisvariabele wordt. Tabel 7.5 geeft het resultaat van de iteratie. Alle elementen in de X_0 - kolom zijn ≥ 0 geworden en dus bevat

Tabel 7.5

De optimale oplossing van het uitgebreide voorbeeld 5.1

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_8
-30	x_2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	1
-47	x_4	$\frac{11}{42}$	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$
-35	x_3	$\frac{5}{21}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{21}$	$-\frac{26}{21}$
$z_j - c_j$		$-35\frac{9}{14}$	5	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{15}{7}$

tabel 7.5 de optimale oplossing. Deze luidt: meng $\frac{1}{2}$ ton B, $\frac{5}{21}$ ton C en $\frac{11}{42}$ ton D; de kosten bedragen 35 $\frac{9}{14}$; het tingehalte is 18% en men gebruikt de maximaal toegelaten hoeveelheid van grondstof B.

Waren één of meer elementen in de X_0 - kolom na de iteratie wéér negatief geweest, dan had de procedure van de duale simplexmethode voortgezet moeten worden.

Men kan de in voorbeeld 7.3 gebruikte methode o.a. toepassen, wanneer men wil nagaan, hoeveel de extra kosten aan grondstoffen zijn als men aan een produkt een nieuwe voorwaarde (bijv. een extra kwaliteitseis) oplegt. De optimale samenstelling wordt dan eerst zonder deze eis berekend met de gewone simplexmethode; vervolgens past men mèt de nieuwe voorwaarde de duale simplexmethode toe, waarna de bij de optimale oplossingen behorende kosten kunnen worden vergeleken.

Naast de tot dusver beschreven simplexmethoden bestaan er nog verschillende andere. Eén van deze methoden is de zgn. primal-dual-methode, waarbij men tegelijk het eerste en het tweede probleem bekijkt. Men gaat uit van een toegelaten oplossing van het duale probleem; vervolgens minimaliseert men de som van de artificiële variabelen van het eerste probleem onder de extra voorwaarde, dat die x_j nul moeten blijven, die corresponderen met de t_j, welke in de oplossing van het duale probleem niet nul zijn. Verkrijgt men een oplossing van het eerste probleem, dan is dit de optimale

oplossing, wat volgt uit opmerking 7.4.

Is het niet mogelijk een oplossing te vinden, die voldoet aan de voorwaarden van het eerste probleem, dan wordt een nieuwe oplossing van het tweede probleem geconstrueerd met een lagere waarde van de duale criteriumfunctie. Hierna worden de beschreven stappen herhaald tot het optimum is bereikt of onoplosbaarheid is aangetoond.

Transportproblemen en daarmee verwante lineaire programmeringsproblemen blijken zeer efficiënt met de primal-dual methode opgelost te kunnen worden. In deel 8 (Netwerkplanning, §5 en §6) wordt een primal-dual algorithme voor een dergelijk speciaal geval behandeld. Voor het oplossen van het algemene lineaire programmeringsprobleem biedt de primal-dual methode geen voordelen boven de gewone simplexmethode. Wij zullen hier niet verder op ingaan.

Tenslotte vermelden wij, dat de duale en de primal-dual methode beide een vorm kennen, die vergelijkbaar is met de in §6 behandelde herziene simplexmethode.

8. Economische interpretatie van de simplexmethode; post-optimale problemen.

In de vorige paragraaf hebben wij gezien dat er een nauw verband bestaat tussen de variabele t_i $(i=1,\ldots,m)$ uit probleem II en de $(z_j - c_j)$ - waarde van de verschilvariabele x_{p+i}, toegevoegd aan de i^{de} voorwaarde in probleem I, en evenzo tussen de variabele x_h $(h=1,\ldots,p)$ uit probleem I en de $(z_j - c_j)$ - waarde van de verschilvariabele t_{m+h}, toegevoegd aan de h^{de} voorwaarde in probleem II.

In veel gevallen kan aan de variabelen t_i en x_h een economische interpretatie gegeven worden met betrekking tot probleem I resp. probleem II. Wij zullen dat in deze paragraaf illustreren voor zgn. toewijzings- of produktieproblemen. Hierbij zal steeds verwezen worden naar het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 8.1

Maximaliseer

(8.1) $y = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3$

onder de voorwaarden

(8.2) $x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 150,$

(8.3) $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100,$

(8.4) $x_1, \ldots, x_3 \geq 0.$

Oplossing met behulp van de simplexmethode leidt tot de in tabel 8.1 opgegeven tableau's; x_4 en x_5 zijn de aan (8.2) en (8.3) toegevoegde verschilvariabelen.

Tabel 8.1

De oplossing van voorbeeld 8.1

	C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
→	0	x_4	150	1	3	5	1	0
	0	x_5	100	1	1	2	0	1
	$z_j - c_j$		0	-10	-20	-15	0	0

	C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
	20	x_2	50	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
→	0	x_5	50	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
	$z_j - c_j$		1000	$-\frac{10}{3}$	0	$\frac{55}{3}$	$\frac{20}{3}$	0

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
20	x_2	25	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
10	x_1	75	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$z_j - c_j$		1250	0	0	20	5	5

Ter inleiding van de discussie merken wij op dat de functie y in iedere stap van het simplexalgorithme geschreven kan worden in de vorm

$$y = z_0 + \sum_{\substack{j \\ \text{niet basis}}} (c_j - z_j)\, x_j \,, \quad (8.5)$$ *)

waarin z_0 de waarde van de functie is in de betreffende stap. Splitsen wij namelijk in een bepaalde stap de vector X in de deelvector X_b (zoals steeds dat deel van X dat de basisvariabelen bevat) en het complement X_{nb}, C in C_b en C_{nb} en tenslotte $\mathcal{A}$ in de matrix der basisvectoren $\mathcal{B}$ en het complement $\mathcal{A}_{nb}$, dan volgt uit $\mathcal{A}X = B$, dat geldt

$$\mathcal{B} X_b + \mathcal{A}_{nb} X_{nb} = B \,, \quad (8.6)$$

dus

$$X_b = \mathcal{B}^{-1} B - \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}_{nb} X_{nb}. \quad (8.7)$$

Substitutie van (8.7) in $y = C'X$ geeft het gezochte resultaat

$$y = C'X = C'_b X_b + C'_{nb} X_{nb} = C'_b \mathcal{B}^{-1} B - C'_b \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}_{nb} X_{nb} + C'_{nb} X_{nb} =$$
$$= z_0 + (C'_{nb} - C'_b \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}_{nb}) X_{nb} = z_0 + \sum_{\substack{j \\ \text{n.b.}}} (c_j - z_j)\, x_j. \quad (8.8)$$

Door de uitgevoerde transformatie zijn de basisvariabelen met behulp van de vergelijkingen $\mathcal{A}X = B$ uit de objectfunctie geëlimineerd.

In de oplossing, behorende bij het tweede tableau van tabel 8.1, is

$$\left\{ \begin{array}{l} X_b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \; ; \quad X_{nb} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \; ; \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \\ \mathcal{A}_{nb} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad C_b = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad C_{nb} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \\ \mathcal{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix} \; ; \quad z_0 = 1000. \end{array} \right. \quad (8.9)$$

---

*) In het vervolg wordt overal onder het sommatieteken "niet basis" afgekort tot "n.b."

De te optimaliseren functie bezit de waarde 1000 en kan in de vorm

$$y = 1000 + \frac{10}{3} x_1 - \frac{55}{3} x_3 - \frac{20}{3} x_4 \tag{8.10}$$

geschreven worden.

Stel dat het toewijzingsprobleem de volgende vorm bezit:

maximaliseer

$$y = \sum_{h=1}^{p} c_h x_h \tag{8.11}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h \leq b_i \quad (i=1,\ldots,m) , \tag{8.12}$$

$$x_1,\ldots,x_p \geq 0 . \tag{8.13}$$

Door het toevoegen van de verschilvariabelen x_{p+i} gaat (8.12) over in

$$\sum_{h=1}^{p} a_{ih} x_h + x_{p+i} = b_i \quad (i = 1,\ldots,m) \tag{8.14}$$

met $x_{p+1},\ldots,x_{p+m} \geq 0$.

De rechterleden b_i zijn positief en stellen de beschikbare produktiecapaciteiten voor: machines, mensen, kapitaal, ruimte. De variabelen x_h geven de niveau's van de mogelijke produktieprocessen weer en de variabelen x_{p+i} (i=1,...,m) de verschillen tussen de aanwezige en de gebruikte capaciteiten.

Starten wij de simplexmethode op de in §4 aangegeven wijze, dan worden in de beginoplossing $x_1,\ldots,x_p$ gelijk aan nul gekozen en krijgen alle verschilvariabelen x_{p+i} het maximaal mogelijke niveau b_i; wij gaan dus uit van de toestand vóórdat er geproduceerd wordt. Vervolgens zoeken wij het produktieproces dat per eenheid van produktie de grootste toename aan de objectfunctie geeft (stel k) en voeren dit op het maximaal mogelijke niveau uit. Aangezien dit maximum door de beschikbare capaciteiten wordt bepaald, berekenen wij het kleinste quotiënt van de aanwezige capaciteiten en de door het produktieproces per eenheid verbruikte capaciteiten. In simplex-terminologie zoeken wij naar $\min_i \frac{b_i}{a_{ik}}$. Wordt dit minimum voor i = r bereikt, dan worden er $\frac{b_r}{a_{rk}}$ eenheden van proces k uitgevoerd, welke

eenheden niet alleen op de volledige capaciteit van produktiefactor r beslag leggen, maar ook op capaciteiten van andere produktiefactoren. Het zou echter zeer toevallig zijn indien alle capaciteiten volledig benut zouden worden; vandaar dat de verschilvariabelen x_{p+i} $(i \neq r)$ na de eerste stap gewoonlijk positief blijven. In voorbeeld 8.1 blijkt $k = 2$ en $r = 1$ te zijn; $\frac{b_1}{a_{12}} = 50$, x_4 wordt 0, maar x_5 blijft positief.

In de volgende stappen zoekt men iedere keer opnieuw naar het nog niet toegepaste produktieproces dat bij uitvoering per eenheid van produktie de grootste toevoeging aan de objectfunctie geeft. De uitvoering van het nieuwe proces heeft gewoonlijk tot gevolg dat de reeds in uitvoering zijnde produktieprocessen op een ander (meestal lager) niveau komen, terwijl ook de nog ter beschikking staande capaciteiten veranderen (vgl. het derde tableau in tabel 8.1). Het in uitvoering te nemen produktieproces vervangt dus a.h.w. de reeds in uitvoering zijnde processen.

Om na te kunnen gaan op welk niveau het nieuwe produktieproces kan worden uitgevoerd moet het beslag, dat het per eenheid op de capaciteiten legt, worden vergeleken met dat van de reeds in gebruik zijnde processen en de nog overgebleven capaciteiten. De vector A_j bevat de vereiste capaciteiten per eenheid van het j^{de} proces. Het vergelijken geschiedt door het proces uit te drukken in de reeds toegepaste processen en de overgebleven capaciteiten, hetgeen wiskundig betekent dat A_j op de basisvectoren wordt ontbonden. Zo zien wij in het derde tableau van tabel 8.1 dat produktie van één eenheid van het derde produkt inhoudt, dat er $\frac{3}{2}$ eenheid van het tweede en $\frac{1}{2}$ eenheid van het eerste produkt minder gemaakt moeten worden. Doen wij dit, dan komen de vereiste capaciteiten vrij; namelijk $\frac{3}{2}.3 + \frac{1}{2}.1 = 5$ eenheden van de eerste produktiefactor en $\frac{3}{2}.1 + \frac{1}{2}.1 = 2$ eenheden van de tweede produktiefactor. Maken wij het niveau x_j, waarop het j^{de} proces wordt uitgevoerd, steeds hoger, dan zal het maximaal mogelijke niveau bereikt worden, zodra één van de produktieprocessen, die vervangen worden, of één van de nog beschikbare capaciteiten is uitgeput. Bij de simplexberekeningen volgt dit maximum uit $\min_i \frac{x_{i0}}{x_{ij}}$ $(x_{ij} > 0)$; (vgl. (4.13) op blz. 30).

Invoering van een nieuw produktieproces heeft alleen dan zin, wanneer de directe opbrengst per proceseenheid $(= c_j)$ groter is dan de vermindering

in de opbrengsten van de door de nieuwe eenheid vervangen produktieprocessen. Men kan gemakkelijk nagaan dat de totale vermindering gelijk is aan z_j (vgl. op blz. 29 de formules (4.9) en (4.10)). Toepassing van een nieuw proces komt slechts in overweging wanneer $c_j > z_j$ is. Kan men zo'n produkt niet meer vinden, dan is het optimale produktieprogramma bereikt.

Stel dat de verschilvariabele x_{p+s} in de optimale oplossing geen basisvariabele is, d.w.z. capaciteit s wordt in de optimale oplossing volledig gebruikt: $x_{p+s} = 0$ en (tenzij er meer dan één optimale oplossing is) $z_{p+s} - c_{p+s} = z_{p+s} > 0$. Geven wij, uitgaande van de optimale oplossing, x_{p+s} een waarde θ waarvoor geldt

$$\theta \leq \min_{x_{i,p+s} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{i,p+s}} , \tag{8.15}$$

dan volgt uit (8.5) dat de bijbehorende waarde z_0^* van de functie y gelijk is aan

$$z_0^* = z_0 + \theta\,(c_{p+s} - z_{p+s}) . \tag{8.16}$$

In voorbeeld 8.1 is x_5 in de optimale oplossing gelijk aan nul. De door (8.15) bepaalde grens voor θ is $\frac{75}{3/2} = 50$. Kiezen wij $\theta = 1$, dan is $z_0^* = 1250 + 1.(0-5) = 1245$; voor $\theta = 50$ is $z_0^* = 1250 - 50.5 = 1000$ (vgl. de oplossing in het tweede tableau van tabel 8.1).

Niet volledig gebruiken van capaciteit s vermindert voor de eerste θ eenheden de opbrengst met $z_{p+s} - c_{p+s} = z_{p+s}$ per eenheid. Men kan ook zeggen: de laatste eenheden van deze capaciteit zijn z_{p+s} per eenheid waard. Dit bedrag wordt de schaduwprijs of de marginale waarde van productiecapaciteit s genoemd, of ook wel de in de optimale oplossing aan de laatste eenheden van deze capaciteit toegekende waarde. Wanneer de c_j in geldwaarden zijn uitgedrukt bezit ook z_{p+s} de dimensie "geldwaarde".

Vergroten wij capaciteit s met η eenheden, dan neemt de opbrengst in eerste instantie toe met z_{p+s} per eenheid. De vector B gaat over in

$$B^* = B + \eta\, E_s , \tag{8.17}$$

waarin E_s de eenheidsvector is met een 1 op de s^{de} plaats. Voor niet te grote η luidt de optimale oplossing

$$X_0^* = \mathfrak{B}^{-1} B^* = X_0 + \eta \mathfrak{B}^{-1} E_s = X_0 + \eta X_{p+s}. \tag{8.18}$$

De grens van η wordt hierin bepaald door de voorwaarde $X_0^* \geq 0$. De opbrengst is $\eta\, C_b' X_{p+s} = \eta\, z_{p+s}$ groter, met behulp van welk gegeven men kan onderzoeken of de kosten om capaciteit s met η eenheden uit te breiden, terugverdiend kunnen worden.

Zouden wij in voorbeeld 8.1 de eerste capaciteit willen uitbreiden dan bedraagt de toename van de opbrengst voor de eerste eenheden 5 per eenheid. Aangezien $\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ is, wordt de grens van η bepaald door

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 + \eta \\ 100 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} 25 + \frac{1}{2}\eta \\ 75 - \frac{1}{2}\eta \end{pmatrix} \geq 0\,, \tag{8.19}$$

waaruit volgt $\eta \leq 150$. Kiezen wij $\eta = 150$, dan is de opbrengst $1250 + 150.5 = 2000$.

Is de verschilvariabele x_{p+s} positief in de optimale oplossing, dan is de schaduwprijs van capaciteit s nul; men zou kunnen zeggen dat de capaciteit een vrij goed is, waarvan extra eenheden ons niets waard zijn.

Wij waarderen nu de produkten, die gemaakt kunnen worden door het beslag, dat ze leggen op de produktiecapaciteiten, te vermenigvuldigen met de schaduwprijzen van deze capaciteiten. Voor het h^{de} produkt vinden wij (vgl. (6.3))

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ih} z_{p+i} = \sum_{i=1}^{m} a_{ih} (C_b' \mathfrak{B}^{-1} A_{p+i}) = C_b' \mathfrak{B}^{-1} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ih} E_i \Big) =$$

$$= C_b' \mathfrak{B}^{-1} A_h = z_h\,, \tag{8.20}$$

welk bedrag men soms de alternativiteitskosten (in het Engels "opportunity costs") van het produkt noemt. Deze kosten zijn dus ook gelijk aan $C_b' X_h$, wat men als volgt kan interpreteren: de vector X_h geeft voor een niet toegepast produktieproces aan met welke lineaire combinatie van de gebruikte processen het equivalent is. De alternativiteitskosten $C_b' X_h$ zijn dan gelijk aan de opbrengst van de combinatie die met één eenheid van het h^{de} produktieproces equivalent is. Het is het bedrag dat wij moeten opofferen indien wij één eenheid van het h^{de} produkt willen gaan maken.

Het h^{de} produktieproces is alleen dan voordelig, wanneer $c_h - z_h > 0$ is; dus wanneer de opbrengst per eenheid groter is dan het per eenheid te offeren bedrag. In de optimale oplossing geldt voor de gebruikte produktieprocessen $c_h = z_h$ en, zolang er slechts één optimale oplossing is, voor de niet gebruikte $c_h < z_h$.

Het verschil $c_h - z_h$ is de marginale waarde van het h^{de} produkt, zodat geldt: marginale waarde = opbrengst per eenheid verminderd met de alternativiteitskosten.

Opmerking 8.1

Het lijkt niet voor de hand liggend de marginale waarde van een produktiecapaciteit te definiëren als $z_j - c_j$ en die van een produktieproces als $c_j - z_j$. Maakt men een variabele echter positief, dan betekent dit voor $x_1, \ldots, x_p$ dat men inderdaad iets gaat produceren; voor de verschilvariabelen $x_{p+1}, \ldots, x_{p+m}$ betekent het, dat minder produktiecapaciteit gebruikt wordt.

Wij beschouwen nu het duale probleem van (8.11) t/m (8.13), dat luidt:
minimaliseer

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i t_i \tag{8.21}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ih} t_i \geq c_h \qquad (h=1,\ldots,p) , \tag{8.22}$$

(8.23) $\qquad t_i \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m)$.

Hierin kan men de t_i zien als waarderingen van de m verschillende produktiecapaciteiten; de functie w is dan de totale waardering, die aan alle capaciteiten tezamen wordt gegeven. In het duale probleem wordt deze totale waardering geminimaliseerd onder de voorwaarden dat de aan de produktieprocessen gegeven waarderingen (dus de sommen $\sum_{i=1}^{m} a_{ih}t_i$) minstens gelijk moeten zijn aan de opbrengsten c_h per eenheid. Uitgedrukt in de taal van het produktieprobleem: de aan de capaciteiten te geven waarderingen moeten zodanig zijn, dat de alternativiteitskosten voor ieder proces minstens gelijk zijn aan de opbrengst per eenheid. De totale toegekende waarde is in de optimale oplossing gelijk aan de maximaal te verkrijgen opbrengst. De optimale waarden van de t_i's kan men dus gebruiken als men de verkregen optimale opbrengst wil toerekenen aan de verschillende produktiefactoren.

De gegeven interpretatie van de schaduwprijzen van de productiecapaciteiten kan met kleine wijzigingen ook worden opgesteld, wanneer een voorwaarde uit (8.12) inhoudt dat hoogstens b_i exemplaren van een produkt gemaakt mogen worden. Bezit een voorwaarde de vorm

$$(8.24) \qquad \sum_{h=1}^{p} a_{1h}\, x_h \geq b_1 \ ,$$

of, na omzetting in een vergelijking, de vorm

$$(8.25) \qquad \sum_{h=1}^{p} a_{1h}\, x_h - x_{p+1} = b_1 \ ,$$

dan blijft gelden: bevat de optimale oplossing x_{p+1} met een positieve waarde, dan is de schaduwprijs t_1 gelijk aan nul. Treedt (8.24) werkelijk als restrictie op, dan brengt verhoging van de eis (dus een grotere waarde van b_1) kosten met zich mee, terwijl omgekeerd verlaging van de eis leidt tot een hogere opbrengst. Hieruit kan bijv. afgeleid worden wat het marginaal ten hoogste waard is, wanneer een eis om minimaal b_1 exemplaren te maken, kan worden verlaagd.

Voor mengproblemen kan men een beschouwing geven, die analoog verloopt aan de hierboven gegeven beschouwing voor produktieproblemen. Men spreekt dan over de schaduwprijzen van de eisen, de waarden van de grondstoffen uitgedrukt in de schaduwprijzen, enz.

Post-optimale problemen.

Er doen zich veel situaties voor, waarin men na berekening van de optimale oplossing van een probleem, wenst te weten wat de konsekwenties zijn van wijzigingen in bepaalde coëfficiënten. Hiertoe is het niet altijd noodzakelijk de berekeningen geheel opnieuw te maken. Voor de volgende dikwijls voorkomende veranderingen zullen wij in het kort nagaan hoe men hun invloed kan onderzoeken:

1. wijzigingen in de C-vector;
2. idem in de B (= A_0)-vector;
3. toevoeging van een A_j - vector;
4. idem van een voorwaarde.

Ad. 1. Wijzigingen in de C-vector veranderen in een gevonden optimale oplossing alleen de coëfficiënten in de $(z_j - c_j)$-rij. Betreft het de c_j-coëfficiënt van een niet-basisvariabele dan wordt alleen de bij deze variabele behorende $(z_j - c_j)$-waarde beïnvloed. Gaat het om de c_j-coëfficiënt van een basisvariabele, dan zullen de $(z_j - c_j)$'s van de meeste niet-basisvariabelen veranderen. Wil men uitsluitsel omtrent de vraag of de oplossing optimaal blijft, dan moet de $(z_j - c_j)$-rij opnieuw berekend worden. De oplossing blijft optimaal, wanneer alle $(z_j - c_j)$'s hetzelfde teken behouden. Slaan één of meer van deze verschillen van teken om, dan kunnen de simplexberekeningen voortgezet worden, uitgaande van het reeds eerder gevonden tableau, waarin de $(z_j - c_j)$-rij door de nieuwe is vervangen.

Voorbeeld 8.2

In voorbeeld 5.1 (zie blz. 64) losten wij een probleem op, waarin

uit 4 grondstoffen een zo goedkoop mogelijke legering samengesteld moest worden, die minstens 18% tin bevatte. De optimale oplossing wordt in tabel 8.2 herhaald en luidt: meng $\frac{9}{13}$ ton B en $\frac{4}{13}$ ton D.

Tabel 8.2

De optimale oplossing van voorbeeld 5.1

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-30	x_2	$\frac{9}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$\frac{21}{26}$	0	$\frac{1}{26}$
-47	x_4	$\frac{4}{13}$	$\frac{20}{13}$	0	$\frac{5}{26}$	1	$-\frac{1}{26}$
$z_j - c_j$		$-35\frac{3}{13}$	$\frac{50}{13}$	0	$\frac{45}{26}$	0	$\frac{17}{26}$

Stel nu dat de kosten c_2 van grondstof B veranderen en bijv. $30 + \gamma$ gaan bedragen in plaats van 30. Gevraagd wordt te onderzoeken voor welke waarden van γ de gevonden oplossing optimaal blijft.

Vervangen wij 30 door $30 + \gamma$, dan gaat tabel 8.2 over in tabel 8.3. De oplossing $x_2 = \frac{9}{13}$, $x_4 = \frac{4}{13}$ blijft optimaal indien alle $z_j - c_j \geq 0$ blijven (dus zolang geldt $\frac{50}{13} + \frac{7}{13}\gamma \geq 0$, $\frac{45}{26} - \frac{21}{26}\gamma \geq 0$ en $\frac{17}{26} - \frac{1}{26}\gamma \geq 0$) , ofwel wanneer γ voldoet aan $-7\frac{1}{7} \leq \gamma \leq 2\frac{1}{7}$. Voor $\gamma < -7\frac{1}{7}$ is de optimale

Tabel 8.3

De oplossing uit tabel 8.2 met $c_2 = 30 + \gamma$ i.p.v. $c_2 = 30$

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$-30-\gamma$	x_2	$\frac{9}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$\frac{21}{26}$	0	$\frac{1}{26}$
- 47	x_4	$\frac{4}{13}$	$\frac{20}{13}$	0	$\frac{5}{26}$	1	$-\frac{1}{26}$
$z_j - c_j$		$-35\frac{3}{13} - \frac{9}{13}\gamma$	$\frac{50}{13} + \frac{7}{13}\gamma$	0	$\frac{45}{26} - \frac{21}{26}\gamma$	0	$\frac{17}{26} - \frac{1}{26}\gamma$

oplossing gegeven in tabel 8.4 en voor $\gamma > 2\frac{1}{7}$ in tabel 8.5. Uit de $(z_j - c_j)$-waarden in deze tabellen kan eenvoudig afgeleid worden dat de gegeven oplossingen optimaal zijn voor iedere $\gamma < -7\frac{1}{7}$, resp. $\gamma > 2\frac{1}{7}$.

Tabel 8.4

De optimale oplossing voor $\gamma < -7\frac{1}{7}$

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$-30-\gamma$	x_2	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{40}$
- 60	x_1	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{20}$	$-\frac{1}{40}$
$z_j - c_j$		$-36 - \frac{4}{5}\gamma$	0	0	$\frac{5}{4} - \frac{7}{8}\gamma$	$-\frac{5}{2} - \frac{7}{20}\gamma$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{40}\gamma$

Tabel 8.5

De optimale oplossing voor $\gamma > 2\frac{1}{7}$

C_b	X_b	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
-35	x_3	$\frac{6}{7}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{26}{21}$	1	0	$\frac{1}{21}$
-47	x_4	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{21}$	0	1	$-\frac{1}{21}$
$z_j - c_j$		$36\frac{5}{7}$	5	$\gamma - \frac{15}{7}$	0	0	$\frac{4}{7}$

Ad 2. Veranderingen in de rechterleden van de voorwaarden hebben geen invloed op de $(z_j - c_j)$-waarden, doch alleen op de oplossingsvector X_0; (vgl. formule (8.18), waarbij ook is aangegeven wanneer de oplossing moet worden aangepast).

Ad 3. Blijkt na de oplossing van een mengprobleem, dat men nog over een nieuwe grondstof kan beschikken, of bij een produktieprobleem dat een nieuw produktieproces kan worden uitgevoerd, dan betekent dat voor het wiskundige model toevoeging van een nieuwe vector A_j. De vraag of hier-

door een betere oplossing kan worden bereikt, beantwoordt men door de $(z_j - c_j)$-waarde te berekenen die bij deze vector in de gevonden oplossing behoort. Afhankelijk van het teken van deze waarde blijft de oude oplossing optimaal of niet-optimaal.

Ad 4. Op welke wijze men de konsekwenties van het toevoegen van een nieuwe voorwaarde aan een lineair programmeringsprobleem kan onderzoeken, is reeds besproken in het laatste gedeelte van § 7 (o.a. in voorbeeld 7.3).

Literatuur

G.B. DANTZIG, Linear programming and extensions, Princeton University Press, Princeton, (1963).

S.I. GASS, Linear programming, McGraw-Hill, New York, (1969).

G. HADLEY, Linear programming, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1962).

G. HADLEY, Non-linear and dynamic programming, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1964).

(Deze teksten sluiten aan op:
G. Hadley, Linear algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1961)).

W.I. ZANGWILL,Non-linear programming: a unified approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1969).